Universidade de Aveiro Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa
Ano de 2010

Ilda Maria Ferreira do Couto Lopes

Uma abordagem curricular em Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico – um estudo de caso em Geometria

Título:	Uma abordagem curricular em Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico – um estudo de caso em Geometria
Autor:	Lopes, Ilda Maria Ferreira do Couto
Edição:	Universidade de Aveiro
1ª Edição:	Vila Real, 2010
Tiragem:	30 exemplares
Nº de páginas:	367 pp**.**
ISBN:	978-972-789-305-8
Depósito legal:	310651/10
Composição:	Minerva Transmontana, Tipografia, *Lda.*

Apoio financeiro da FCT e do FSE no âmbito do III Quadro Comunitário de Apoio.

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR

Ciência.Inovação 2010 Programa Operacional Ciência e Inovação 2010

UNIÃO EUROPEIA

Fundo Social Europeu

Universidade de Aveiro Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa
Ano de 2010

Ilda Maria Ferreira do Couto Lopes

Uma abordagem curricular em Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico – um estudo de caso em Geometria

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Didáctica, realizada sob a orientação científica da Doutora Ana Maria Reis d'Azevedo Breda, Professora Associada com Agregação do Departamento de Matemática e da co-orientação científica da Doutora Nilza Maria Vilhena Nunes da Costa Professora Catedrática do Departamento de Didáctica e Tecnologia Educativa da Universidade de Aveiro.

Apoio financeiro da FCT e do FSE no âmbito do III Quadro Comunitário de Apoio.

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR

Ciência.Inovação 2010 Programa Operacional Ciência e Inovação 2010

UNIÃO EUROPEIA

Fundo Social Europeu

Dedico este trabalho a todos os adolescentes e jovens que foram *meus* alunos e a todos os professores e educadores com quem fiz *caminho*.

o júri

presidente

Prof. Doutor Joaquim Manuel Vieira
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Nilza Maria Vilhena Nunes da Costa
Professora Catedrática da Universidade de Aveiro (**Co-Orientadora**)

Prof. Doutor João Filipe Lacerda Matos
Professor Associado com Agregação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Prof. Doutora Ana Maria Reis d'Azevedo Breda
Professora Associado com Agregação da Universidade de Aveiro (**Orientadora**)

Prof. Prof. Doutor Jaime Maria Monteiro de Carvalho e Silva
Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Prof. Doutora Maria Isabel Coutinho Vieira
Professora Adjunta do Instituto Superior de Contabilidade e Administração do Instituto Politécnico do Porto

Prof. Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Às Professoras Doutoras Ana Breda e Nilza Costa pela orientação dedicada e competente, mas também pela amizade e incentivo permanentes.

À Escola Secundária com 3º Ciclo do Ensino Básico de São Pedro de Vila Real por todo o apoio prestado e disponibilização de recursos na realização deste trabalho.

À Fundação Calouste Gulbenkian pelo financiamento do estágio de curta duração com a referência 81709/2006, de 21 de Agosto a 8 de Setembro de 2006, no Centro de Investigação Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education da Universidade de Utrecht na Holanda onde se pode contactar com investigadores da área e aprofundar conhecimento específico na área da educação matemática e da geometria.

À Fundação para a Ciência e Tecnologia pelo co-financiamento do Programa Operacional da Ciência e Inovação 2010 e do Fundo Social Europeu através da bolsa de investigação SFRH/BD/28518/2006 na qual está incluída parte de investigação que serviu de base a esta tese (a partir de Outubro de 2006).

Aos colegas que colaboraram directa ou indirectamente neste trabalho e, em especial, ao grupo de Matemática da Escola Secundária com 3º Ciclo do Ensino Básico de São Pedro de Vila Real.

À Drª Celeste do Carmo Pereira pela disponibilidade, amizade e colaboração no trabalho planeamento, implementação e de reflexão das práticas lectivas durante o *trabalho de campo*.

A todos os alunos de 9º Ano da Escola Secundária com 3º Ciclo do Ensino Básico de São Pedro de Vila Real do ano lectivo 2004/2005 e, em especial, aos alunos das turmas do 9º A, 9ºB e 9º E pelas vivências de ensino que me proporcionaram e pelas experiências de aprendizagem que me proporcionaram como sua professora.

A toda a minha família e aos meus filhos Pedro, Paulo, Isaac e Ester mas em especial ao Bernardino pelas longas discussões, críticas, sugestões e, essencialmente, pela escuta activa ao longo de todo o trabalho de investigação.

palavras-chave

Matemática, Geometria, Ensino, Aprendizagem, Currículo, Desenvolvimento Curricular, Competências, Mediação do professor.

resumo

Este trabalho debruça-se sobre as práticas de Ensino de Geometria no 3º ciclo do Ensino Básico tendo como principal foco de investigação as práticas de ensino da professora investigadora. O estudo empírico foi realizado em três turmas de 9º ano, da professora investigadora, de Abril a Junho de 2005, numa Escola da região de Trás-os-Montes (designada por Escola A). O trabalho realizado pela professora investigadora com alunos dessas turmas (no 7º em 2002/03, no 8º ano em 2003/04 e no 9º ano até Abril de 2005) constituiu o contexto precursor do estudo.

O planeamento, desenvolvimento e reflexão sobre as práticas desenvolvidas foram realizados de forma colaborativa entre a professora investigadora e a *critical friend*, professora de Matemática a leccionar Matemática a turmas de 9º ano, numa outra Escola, da mesma região de Trás-os-Montes (designada por Escola B). A gestão curricular orientada por pressupostos legais em vigor e por resultados da investigação em Educação e Didáctica da Matemática foi realizada considerando o conhecimento informal e tácito de cada aluno; visou maximizar a aprendizagem matemática de todos os alunos em cada turma mas tendo a preocupação subjacente de proporcionar experiências de aprendizagem diversificadas de forma a favorecer todo o tipo de estilos de aprendizagem.

O problema de investigação foi formulado a partir da seguinte questão:

Como articular os esforços realizados e desenvolvidos pelo professor na sala de aula, de forma coerente e exequível, para promover aprendizagens significativas nos alunos, nomeadamente no domínio da Geometria?

Face ao problema de investigação foram abordadas e estudadas as questões de investigação seguintes:

1. Quais são as características da experiência matemática proporcionada e qual é a sua relação com o que os alunos aprenderam?
2. Quais as características da avaliação implementada enquanto processo regulador das aprendizagens?
3. Qual a relação entre as tarefas de aprendizagem planificadas e as experiências de aprendizagem matemática proporcionadas?
4. Qual o papel das conferências com a *critical friend* (no desenvolvimento das experiências matemáticas proporcionadas) na gestão curricular?

Este trabalho seguiu uma metodologia de investigação de natureza qualitativa baseado num estudo de caso, com uma vertente de investigação-acção, a partir de uma abordagem curricular em Geometria no 3º ciclo do Ensino Básico: a da professora investigadora. A observação participante e uma grande diversidade de documentos recolhidos (tarefas iniciais e reformuladas, cópias de relatórios, diários de bordo, transcrições das gravações áudio das conferências, etc.) constituíram as principais fontes de dados. Também foram considerados dados provenientes de instrumentos mais quantitativos, como de testes e de questionários.

A análise de dados tomou como base a unidade de tempo de meio bloco de aulas (45 minutos) e as fases didácticas de realização de tarefas numa escala de investigação meso de forma a respeitar o trabalho na sala de aula e a sua complexidade. A triangulação de diversas fontes de dados permitiu apresentar: i) a experiência matemática proporcionada a partir das tarefas implementadas e os diferentes papéis assumidos pelo professor, pelos pequenos grupos de alunos ou pelo grupo turma; ii) as práticas avaliativas onde foram evidenciadas as diferentes formas de avaliação formativa e o *feedback* distribuído; iii) o envolvimento induzido e promovido nos alunos relativamente à sua aprendizagem matemática; iv) o papel crucial da *critical friend* na abordagem curricular em foco. A partir dos testes de competências e do questionário acerca do ensino, da avaliação e do modo de estudar dos alunos (QEAME) foi possível identificar os ganhos e o impacte desta abordagem curricular no desenvolvimento dos três tipos de constelações de competências e as percepções dos alunos relativamente à mediação realizada pela professora investigadora relativamente ao ensino, aprendizagem e métodos de estudo, respectivamente; a Listagem Dinâmica de Perguntas permitiu aumentar a consciência acerca dos itens trabalhados em sala de aula.

A principal conclusão deste estudo é de que é possível implementar um currículo que desenvolva e favoreça a aquisição e desenvolvimento de competências na Geometria (desde as mais elementares até às de nível superior – nas diferentes constelações de reprodução, de conexão e de reflexão) onde o trabalho colaborativo entre os professores é fundamental na gestão e desenvolvimento curriculares. Como implicações para a investigação educacional em matemática surge a necessidade de se fomentar estudos investigacionais descritivos e holísticos em salas de aulas normais sobre as opções e razões das práticas de ensino, das actividades de aprendizagem e das diferentes formas de avaliação.

keywords Mathematics, Geometry, Teaching, Learning, Curriculum, Curricular Development, Competencies, Teacher mediation.

abstract

This work focuses on teaching practices of Geometry on Basics Education having as main investigation focus the several teaching practices used by a teacher. This empiric study was produced in three classes of the ninth grade enrolled by the researching teacher, from April to June of 2005, in a school from the 'Trás-os-Montes' region (designed A school). The work produced by the researcher teacher in the classes (7º - 2002/03, 8º - 2003/04 and 9º year until April 2005) constituted the background for the development of this study.

The development, planning and reflection of the developed practices were made in a collaborative way between the research teacher and a *critical friend,* Maths Teacher teaching ninth grade classes in the same region 'Trás-os-Montes'(designed B school). The curricular management was done according to the legal presuppositions and by the research results from Maths Didactics and Education. This process took into account what the teacher knows about each student, having as aim to maximize the experiences of learning Mathematics for all students involved. The concerns were to diversify the mathematics learning experiences in order to take in account all type students learning styles.

The investigation problem considered was:

How to articulate all the efforts made by the teacher in the classroom, in the most coherent possible way in order to promote significant learning achievements for the students namely in Geometry approach this problem it was formulated the following research questions:

1. What are the characteristics of a mathematical experience and its relation with what the students have learnt?
2. What are the characteristics of the assessment methods while regulator of the learning achievements?
3. What is the relation between the planned learning tasks and the experiences of learning maths?
4. What is the role of the several discussions with the *critical friend* (made possible by the development mathematical experience) in the curricular management?

This work followed a research methodology of quality nature based on a case study from a curricular approach to geometry in 3º cycle of Basics Education: The approach of the research teacher. The participant observation and the data collection of several documents (initial and reformulated tasks, report copies, journals, audio recordings of discussions, etc.) constituted the main source of data. Moreover it was also considered data produced from answers to tests and questionnaires.

The data analysis took as base the time unit a class of 45 minutes as well as the didactics phases for the realization of several tasks in a meso-scale research in order to identify the work developed in the classroom and its complexity. The triangulation of several data sources allowed the research teacher to present: i) the mathematical experience provided through implemented tasks and the different roles assumed by the teacher, small groups of students or by the whole class; ii) Assessment practices where it is shown different evaluation processes and *feedback*; iii) the induced involvement of the students concerning their mathematical learning experience; iv) the crucial role of the *critical friend* in the respective curricular approach. From competences and abilities tests and also from QEAME questionnaire it was possible to identify the achievements and the impact that this curricular approach had on the development of the three different types of student competences and perceptions relatively to the research teacher mediation. The Dynamic List of Questions asked by the students allowed the teacher-researcher increase the student awareness of the topics worked in classroom.

The main conclusion of this study is that is possible put in practice a curriculum that develop and allow the acquisition and development of Geometry competencies (basics - reproduction constellation and high level competencies - through to the connection and reflection constellations) where the collaborative work among teachers is important in the curriculum management and development. This study point out as implication for the mathematics education research the needs to improve descriptive and holistic research studies inside real classrooms about the teaching practices, learning activities and the diversity of assessment methods, justifying the teacher options and reasons.

ÍNDICE

Índice de figuras, gráficos e tabelas

Capítulo 3

Capítulo 4

Capítulo 5

Capítulo 6

Capítulo 7

Capítulo 8

Capítulo 9

Capítulo 10

1 - Introdução

O currículo nacional português (ME, 2001) para o ensino básico onde se inclui o 3º ciclo está definido em termos de competências essenciais e de experiências de aprendizagem consideradas como sendo para todos os alunos (em cada ciclo de escolaridade), em vez dos tradicionais programas indicando os tópicos de conteúdos e as sugestões metodológicas para cada ano. No caso das competências matemáticas são referidos aspectos como

predisposição para raciocinar matematicamente,

aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem oral, não ambígua e adequada à situação,

aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado,

gosto e confiança pessoal em desenvolver actividades intelectuais,

tendência para procurar a estrutura abstracta.

Os resultados das provas de aferição do ensino básico respeitantes à disciplina de Matemática entre 2001-2003, referidos na Análise Comparativa (2001-2003) (ME/DGIDC, 2004: 61), mostram que os nossos alunos encontram grandes dificuldades na resolução de problemas, na comunicação matemática e no raciocínio:

"*em qualquer uma das competências*[1] *consideradas, verifica-se um decréscimo acentuado no desempenho dos alunos do 4º para o 6º ano, parecendo haver alguma recuperação no 9º ano;*

no 6º ano de escolaridade é aquele em que os alunos evidenciam piores resultados;

a comunicação é a competência em que os alunos revelam piores níveis de desempenho, em qualquer ano de escolaridade;

tendencialmente, o desempenho na competência de raciocínio decresce de 2001 para 2003, em qualquer ano de escolaridade;

em todos os anos de aplicação das provas, os níveis de desempenho dos alunos, no que respeita à competência da resolução de problemas, diminuem à medida que os alunos avançam na sua escolaridade".

---

[1] As competências consideradas no estudo das provas de aferição são de quatro tipos: *conhecimento de conceitos e procedimentos, resolução de problemas, comunicação e raciocínio.*

O mesmo tipo de resultados tornam a aparecer no estudo realizado nas provas de aferição do 9º Ano, em 2004 (ME/DGIDC, 2004: 154): "*continua a verificar-se que é nas questões que envolvem as competências de comunicação, raciocínio e resolução de problemas onde os alunos revelam maiores dificuldades*".

Estes são, também, os aspectos transversais aconselhados a serem experienciados pelos alunos, com recursos de natureza diversa (tecnologias, materiais manipuláveis, etc.), a partir de "*tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos (nomeadamente resolução de problemas e actividades de investigação) e que diversifiquem as formas de interacção em aula, criando oportunidades de discussão entre os alunos, de trabalho de grupo e de trabalho de projecto*" Relatório do Projecto "Matemática 2001 – diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática" (APM, 1998: 42).

Do exposto parece poder inferir-se da necessidade de se desenvolverem estudos que, incidindo em abordagens curriculares da disciplina de Matemática diversas, no 3º Ciclo do Ensino Básico, analisem que tipo de relações existe entre a experiência matemática realizada, a reflexão produzida, o ambiente proporcionado e as competências desenvolvidas nos alunos. É este o enfoque do nosso estudo.

A educação matemática, para todos os alunos, constituirá uma das vertentes da formação geral e global, num alargado leque de direcções – humanística, científica, técnica, artística e para a cidadania democrática. Parte-se do pressuposto de que a formação em matemática se atinge através de uma experiência matemática intensa e variada, e de reflexão sobre essa experiência.

O foco da investigação é a abordagem curricular em geometria efectuada pela professora investigadora, na Escola A, no período compreendido entre Abril e Junho de 2005, correspondendo ao 3º período do 9º ano de escolaridade. A investigação é realizada no último ano do 3º Ciclo do Ensino Básico, relativo ao triénio 2002/2003 a 2004/2005: a professora investigadora acompanhou duas turmas desde o 7º ano (2002/2003) e uma terceira apenas a partir do 8º ano de escolaridade (2003/2004), constituindo esse período o contexto precursor desta investigação. Este contexto é caracterizado por mudanças educativas graduais e deliberadas nas práticas (apresentadas no item 5.2) que permitiram à professora investigadora investir, de uma forma mais profunda e consistente, na abordagem curricular em geometria em foco neste trabalho de investigação.

O *currículo moldado* (Gimeno-Sacristán, 2000) foi centrado na experiência matemática e na reflexão sobre essa experiência, valorizando as actividades de exploração e de investigação na sala de aula para proporcionar uma aprendizagem significativa (Ausubel, 1980). A gestão curricular realizada, considerando o conhecimento informal e tácito de cada aluno, visou maximizar a aprendizagem matemática de todos os alunos em cada turma mas tendo a preocupação subjacente de causar menos danos na aprendizagem a cada aluno enquanto indivíduo. Investiu-se na organização e desenvolvimento do ensino, planeamento do *currículo em acção*, seleccionando tarefas, proporcionando aprendizagens estruturantes, dinâmicas de sala de aula, estratégias e instrumentos de avaliação onde os princípios da diversidade, integração e articulação pudessem ser implementados, abrangendo uma grande variedade de domínios do currículo e mobilizando a grande generalidade das competências matemáticas (específicas e transversais). O envolvimento dos alunos nas aprendizagens e trabalho proporcionados foi um dos aspectos sob observação permanente uma vez que a experiência e os resultados da investigação mostram que os alunos que se interessam, se comprometem nas tarefas e se envolvem têm mais hipóteses de aprender (Perrenoud, 1999: 13). O trabalho desenvolvido (planeamento, desenvolvimento e reflexão sobre as práticas desenvolvidas) foi realizado de forma colaborativa entre a professora investigadora e a *critical friend*, professora da mesma região de Trás-os-Montes, a leccionar o 9º ano; regularmente as duas professoras encontravam-se – conferências - para reflectir sobre as práticas desenvolvidas através do relato dos acontecimentos e dos desenvolvimentos da experiência matemática realizada pelos alunos em sala de aula. O enquadramento da investigação tem em consideração o ponto de vista da Didáctica e, em particular, na sua componente do Desenvolvimento Curricular em Matemática.

Assim, o problema de investigação é:

Como articular os esforços realizados e desenvolvidos pelo professor na sala de aula (no âmbito da mediação da aprendizagem), de forma coerente e exequível, para promover aprendizagens significativas nos alunos?

Face ao problema de investigação tentaremos abordar e responder às questões de investigação seguintes:

1. Quais são as características da experiência matemática proporcionada, e qual é a sua relação com o que os alunos aprenderam?

1.1 Como é que o professor consegue que os seus alunos se envolvam no trabalho matemático proposto? Quais as características do envolvimento dos alunos na sua aprendizagem matemática?

1.2 De que modos o professor leva os alunos a terem consciência da aprendizagem matemática realizada?

1.3 Como é que os alunos são desafiados a pensar profundamente sobre o que eles estão a aprender?

1.4 Qual o impacte da abordagem curricular concebida no desenvolvimento de competências dos alunos?

2. Quais as características da avaliação implementada enquanto processo regulador das aprendizagens?
3. Qual a relação entre as tarefas de aprendizagem planificadas e as experiências de aprendizagem matemática proporcionadas?
4. Qual o papel das conferências com a *critical friend* (no desenvolvimento das experiências matemáticas proporcionadas) na gestão curricular?

Este estudo apresenta um capítulo inicial seguido de quatro grandes partes. O primeiro capítulo designado de introdução é o capítulo onde se contextualiza o estudo e se apresentam o problema e questões de investigação que orientaram a investigação educacional. O estudo está estruturalmente organizado em quatro partes: a Parte I relativa aos fundamentos teóricos; a Parte II em que se descreve o estudo empírico; a Parte III relativa aos resultados; e a Parte IV onde se formulam as conclusões deste estudo e onde se alude a limitações do estudo e propostas de investigações educacionais futuras. Assim, a Parte I é constituída por três capítulos, a saber: capítulo 2 onde se reflecte sobre o papel da educação matemática na sociedade; o capítulo 3 onde se problematiza o desenvolvimento curricular em matemática e o capítulo 4 onde a reflexão se centra sobre algumas das especificidades do desenvolvimento curricular em ensino da geometria. Na Parte II, relativa ao estudo empírico, há três capítulos sendo que o capítulo 5 é relativo à descrição do estudo e reflectindo, especialmente, sobre o *design* do estudo (5.1), o contexto precursor (5.2), caracterização das turmas do estudo (5.3), do planeamento da abordagem curricular (5.4) e da apresentação dos instrumentos de recolha de dados (5.5); o capítulo 6 apresenta a descrição da abordagem curricular implementada fazendo uma análise da experiência matemática proporcionada pelas tarefas implementadas (6.1), da avaliação formativa e do *feedback* proporcionado (6.2), de como a professora promoveu o envolvimento dos alunos na actividade matemática (6.3) e das implicações do trabalho colaborativo da professora investigadora com a *critical friend* (6.4); o capítulo 7 é relativo à análise de dados obtidos por três instrumentos de recolha de dados - o questionário acerca do ensino, da avaliação e das estratégias de estudo – QEAME (7.1), os testes de competências (7.2) e a Listagem Dinâmica de Perguntas (7.3). A terceira parte é relativa aos resultados e está organizada de acordo com as questões de investigação, a saber: capítulo 8 sobre as características da experiência matemática proporcionada pela abordagem curricular em causa, capítulo 9 sobre a avaliação formativa e do *feedback* proporcionados, o capítulo 10 sobre a relação entre as tarefas planificadas e a experiência de aprendizagem matemática proporcionada e o capítulo 11 sobre o papel das conferências entre a professora investigadora e a *critical friend*. A quarta parte é relativa às conclusões e considerações finais (capítulo 12) e sobre as limitações deste estudo e as propostas para trabalhos futuros (capítulo 13).

PARTE I - Fundamentos teóricos

2. Papel da educação matemática

Neste capítulo iremos abordar o papel da educação matemática na formação integral de todos os cidadãos. Começaremos por fundamentar que a educação matemática tem de ser para todos (2.1) e problematizaremos o tipo de educação e quais as perspectivas de ensino (2.2); reflectiremos acerca de como a educação matemática pode promover a cidadania democrática considerando cada aluno como sujeito político e não apenas como sujeito cognitivo (2.3), acerca do que significa a literacia matemática (2.4) e acerca da competência matemática e do desenvolvimento de competências matemáticas (2.5).

2.1 Educação para todos

No limiar do século XXI assistimos, em todo o mundo, a uma profunda transformação das dimensões e da própria concepção do que constitui a educação fundamental. Antes considerada como um bem de consumo, a educação é reconhecida agora como um investimento no factor de produção mais indispensável que é a competência humana (Ordoñez, 2005). Importantes conferências das Nações Unidas (tais como a Conferência Internacional sobre a População e Desenvolvimento (no Cairo), o Encontro de Cúpula Mundial para o Desenvolvimento Social (em Copenhaga) e a Conferência Mundial sobre as Mulheres (em Beijing)) examinaram diversos aspectos de desenvolvimento social e procuraram influir sobre as diversas opiniões e as políticas nacionais. Constataram que a educação é a chave do progresso em todos esses âmbitos. Por isso, a educação deve ser considerada não apenas como um direito fundamental do Homem, mas também como um instrumento indispensável para o desenvolvimento social e económico. Ordoñez (2005) fazendo o balanço do século XX, no que diz respeito ao acesso à instrução, afirma que este é fonte de orgulho e de vergonha. Por um lado, houve um esforço educacional muito grande tendo o número de adultos alfabetizados triplicado desde a década de 60 de 1,002 biliões para mais de 2,7 biliões na actualidade. Contudo, ainda existem hoje mais de 900 milhões de analfabetos no mundo. Um para cada 5 homens e 2 para cada 5 mulheres ingressaram no séc. XXI sem dispor das competências que lhes permitem participar plenamente do mundo moderno, isto é sem saber ler, escrever e contar. Assim, no sécculo XXI, as nações e as sociedades terão de se dedicar particularmente a organizar, sob diferentes formas, a educação para **todos**. De facto, e segundo Santos (2005) o direito à educação aparece, no final da década de 90, do século XX, como uma importante meta internacional. Um direito social que só encontra condições de implementação quando uma educação de qualidade se tornar extensiva a **todos**, e ao longo de toda a vida de cada um, como documentam as conclusões da importante conferência mundial sobre a educação para todos, que teve lugar em Jomtien (Tailândia) em 1990, e donde resultou uma declaração mundial – "Educação para todos: responder às necessidades educativas fundamentais".

Neste contexto, a UNESCO atribui à educação um papel fundamental e, por isso, escolheu o ano 2005 para abrir uma década (2005-2014) de reflexão e acção na procura de medidas para a crise planetária global que nos afecta a todos – "Década da Educação para o Desenvolvimento Sustentável". Segundo a UNESCO "*À educação cabe fornecer, de algum modo, a cartografia de um mundo complexo e constantemente agitado e, ao mesmo tempo, a bússola que permita navegar através dele*". Esta metáfora da educação como mapa e bússola permite-nos reflectir que esta apenas servirá para estabelecer conexões, apresentar posições de referência; não tem receitas nem respostas prévias.

2.2 Que educação? – que perspectivas de ensino?

Até aos finais do século XX os propósitos da instrução, tinham a ver com a fragmentação e o imediatismo da informação (bastantes disciplinas na educação básica), a acumulação de conhecimentos por justaposição, a sobrevalorização de conhecimentos técnicos muito especializados e o entendimento do conhecimento como algo externo ao indivíduo e imposto ao mesmo – algo divorciável do significado humano e de trocas intersubjectivas.

São identificados durante o século XX três tipos de percursos educacionais (Santos, 2005: 25-36): percursos do tipo dogmático-transmissivo (pedagogia na 3ª pessoa) com ênfase na aquisição conceptual, percursos na esteira da não directividade (pedagogia na 1ª pessoa) e percursos na esteira do construtivismo (pedagogia na 2ª pessoa) com ênfase na mudança conceptual - entendem que a criança é, com mais propriedade, sujeito do que objecto da educação. Já Cachapuz *et al.* (2002: 139-189) entende haver várias perspectivas do ensino das ciências: ensino por transmissão, dando-se ênfase à aquisição de conceitos (ensino directo segundo Ponte (2005) ou, segundo outros autores, ensino tradicional, ensino expositivo); ensino por descoberta, com ênfase na compreensão de processos científicos; ensino para a mudança conceptual, com ênfase na mudança de conceitos. Finalmente, Cachapuz *et al.* (2002), propõem um modelo de ensino, que designa de ensino por pesquisa, com ênfase na construção de conceitos, atitudes e valores. Enquanto os três primeiros modelos propostos por Cachapuz *et al.* (2002) são essencialmente instrucionais, o último pretende ter ênfase na educação. Ponte (2005) apenas apresenta em contraposição ao ensino directo o ensino-aprendizagem exploratório o que nos parece querer incluir numa categoria bastante larga diferentes tipos de ensino. Esta dicotomia parece ajudar pouco a perceber os diferentes tipos de percursos educacionais existentes.

2.3 A cidadania democrática

Num ciclo de colóquios e debates sobre a qualidade da educação em Portugal organizado pelo CNE (Conselho Nacional de Educação), Pureza (2002: 388-340) refere a necessidade de um novo contrato socioeducativo, de ciclo longo, em que se vise combater um défice estrutural da nossa sociedade: o défice da cidadania [democrática]. Neste pressuposto apresenta como principais contornos:

- «a *recusa das fatalidades* ilucidando-a com recurso a Savater "Parece-me que o ideal básico que a educação hoje deve conservar e promover é a universalidade democrática. (...) Cada qual é o que demonstra que sabe ser com o seu empenhamento e habilidade, não o que o seu berço – esse berço biológico, racial, familiar, cultural, nacional, de classe social, etc. – o predestina para ser, segundo a hierarquia de oportunidades estabelecida por outros. Nesse sentido, o esforço educativo é sempre rebelião contra o destino, sublevação contra o *fatum*, a educação é anti-fatalidade, não adaptação programada (...)."
- a valorização da desobediência – a educação para a cidadania democrática deve *educar para a desobediência crítica*. No centro da cidadania democrática está a justiça e não a lei. Está a participação e não a delegação de poderes. Está a convicção e não a norma. Está a desobediência solidária e não a disciplina acéfala.[...]
- a colocação da *interculturalidade* no centro do sistema educativo.»

Neste contexto o mesmo autor afirma que um importante conteúdo material para esse contrato socioeducativo, formal e informal, há-de assumir o "desafio de apetrechar jovens e adultos não apenas de competências cognitivas, mas também de competências ético-afectivas (o reconhecimento e valorização da alteridade e da diferença, a capacidade dialógica, a assunção da reciprocidade como valor-guia) e de competências sociais (da intervenção crítica à tolerância, passando pela capacidade de conceber e levar a cabo projectos conjuntos)". Nesta acepção a educação para a cidadania democrática tem de ser uma educação para a "*tensão e complementaridade entre os particularismos que dão densidade de referências à nossa experiência e o cosmopolitismo exigido pela unidade do género humano*" (Pureza, 2002: 390).

Para Roldão (2003: 11) a escola, pela sua lógica de funcionamento, tem sido incapaz de garantir a aprendizagem de todos mas todos necessitam dela, numa sociedade a exigir crescente qualificação, particularmente ao nível do mercado de trabalho. Nesta lógica afirma que o problema de organizar a escola de forma a que se garanta a aprendizagem de todos os seus utentes é cada vez mais um problema social e político e que pode ser equacionado do seguinte modo – "*como integrar os largos milhares de potenciais marginalizados sociais (os «não competentes») que resultam da não aquisição destas competências, com consequente não emprego e não inserção social, e que, porque hoje não há saída para eles, vão alimentar os nichos de exclusão com os graves problemas sociais a ela associados?!*"

As questões levantadas por Roldão são tão ou mais pertinentes quanto muitos de nós ainda estamos marcados pela concepção de que a ciência em geral é neutra e a educação só pode ajudar os cidadãos a serem melhores e mais adaptados à sociedade.

Skovsmose e Valero (2002) problematizam exactamente a relação da educação matemática com a democracia afirmando que esta não é óbvia nem muito clara e colocam as seguintes questões:

Qual é o significado de democracia quando considerado na arena da educação e quando colocado lado a lado com a educação matemática?

Qual é o significado da educação matemática quando ligada aos objectivos democráticos da educação e da sociedade?

Quais devem ser as prioridades de uma agenda da investigação que tem como premissa a ligação e a relação entre a educação matemática e a democracia?

Estes autores apresentam três interpretações diferentes da relação entre a democracia e a educação matemática: a da *ressonância intrínseca*, a da *dissonância intrínseca* e a da *relação crítica*.

No caso da tese da **ressonância intrínseca** concebe-se a matemática e a educação matemática como contribuição para a democracia. Esta tese é baseada na presunção de que, devido à natureza da matemática, os interesses e os valores democráticos podem ser seguramente englobados pela educação matemática. Assim, a relação entre educação matemática e democracia é harmoniosa, no sentido em que corresponde a uma combinação entre as qualidades básicas da educação matemática e os princípios democráticos. Em síntese, há que investir numa educação num mundo complexo e em célere mudança em que não se pode partir do pressuposto que os valores estão em pano de fundo mas que têm de ser trabalhados em simultâneo com os avanços da ciência e de ser problematizados num contexto macro, meso e micro sob pena das aprendizagens servirem de muito pouco. Segundo esta tese as qualidades políticas da educação matemática podem ser assumidas *a priori* por qualquer programa de pesquisa e por isso não é discutida explicitamente a relação entre a educação matemática e democracia. Skovsmose e Valero enquadram nesta tese toda a investigação matemática que assume o internalismo na pesquisa em educação matemática como característica académica onde as questões de investigação no desenvolvimento dos programas de estudo são salvaguardadas da «contaminação» da sociedade e da política.

No caso da **dissonância intrínseca** sustenta-se que a educação matemática tem tido uma função social de diferenciação e exclusão apesar dos discursos democráticos que justificam a sua permanência nas escolas. Em vez de abrir oportunidades para todos, a educação gera processos de selecção, exclusão e segregação. Estabelece-se uma demarcação entre aqueles que têm acesso ao poder e ao prestígio dado pela matemática e aqueles que o não têm. Skovsmose e Valero explicitam, então, que a matemática tal como é usada e aplicada actualmente nas sociedades e a educação matemática tal como é actualmente concedida e executada opõe-se aos valores democráticos: "a tese da dissonância [intrínseca] sugere que a educação matemática estabeleceu um modelo de obstáculo sistemático ao acesso dos valores democráticos baseados no género, na etnia, na língua e no estatuto socio-económico" (Skovsmose e Valero, 2002: 12-13).

Skovsmose e Valero posicionam-se numa **perspectiva crítica** em que assumem que a relação entre a educação matemática e a democracia tem de ser equacionada de forma crítica e aberta. Para estes autores não existe uma lógica interna que guia o desenvolvimento da educação matemática para qualquer dos lados; *consideram que uma educação matemática que esteja comprometida com a democracia não pode reduzir-se simplesmente às qualidades intrínsecas da matemática ou à construção conceptual da disciplina. Em vez disso, existem muitos factores sociais, políticos, económicos e culturais* *que devem ser tomados em conta como estando constantemente a direccionar e a redireccionar o seu desenvolvimento* (Skovsmose e Valero, 2002: 13).

2.3.1 O aluno como sujeito político

Valero (2002), acerca da reflexão do contexto e a educação matemática para a democracia, contrapõe à imagem do aluno como *sujeito cognitivo,* que apenas existe nas concepções dos investigadores em educação matemática, para melhor poder estudar o campo experimental, a imagem real dos alunos das salas de aulas: indivíduos que podem estar doentes, que podem ter problemas económico-sociais que podem mesmo não querer aprender (pelas mais variadas razões) - *o sujeito político* (Valero, 2002: 56). Para Valero o adjectivo "político" reconhece a natureza intrínseca do ser humano como ser actuante e gerador das suas condições sociais e materiais de vida. Os sujeitos políticos fundamentalmente participam no mundo social-económico-político-histórico-cultural e através dessa participação pensam, conhecem, produzem e envolvem-se com o mundo (não são unicamente seres pensantes!). Valero propõe, assim, a noção de **contexto sociopolítico** que considera "a integridade social dos participantes nos processos de ensino e aprendizagem da matemática e situações distintas, áreas e níveis de acção social". [...] "Desta maneira abre-se a possibilidade de gerar uma imagem integral das múltiplas dimensões que fazem parte dos nossos alunos e que também constituem o acto de aprender matemática na escola". Uma posição sociopolítica na educação matemática resgata a complexidade do ser humano e coloca-a no centro das reflexões quer do educador matemático quer do professor. Assim, «a preocupação pela formação para a cidadania através do ensino da matemática não se trata unicamente de trazer para a aula um conteúdo contextualizado que sirva de motivação para a construção de ideias matemáticas significativas e "poderosas"» (Valero, 2002: 56). O facto mais importante consiste em reconhecer a maneira como a aula de matemática, como espaço de acção social, põe em contacto o professor e alunos – seres humanos com um passado, presente e futuro – e como os processos de aprendizagem da matemática escolar se constroem e negoceiam nesse espaço e entre tais seres. Assim, a contribuição da educação matemática para a democracia não se centra apenas no desenvolvimento de melhores capacidades de pensamento matemático nos alunos. Inclui, também, a oportunidade de que professores e alunos se percebam como seres sociais e políticos, com possibilidades de exercer influência nas várias actividades na aula ou fora dela ajustando o uso de diversos conhecimentos, habilidades e competências às diversas situações. Igualmente, inclui a possibilidade de se ser consciente das consequências de adoptar uma determinada posição e de actuar a partir dela com um determinado conjunto de ferramentas particulares tais como as competências associadas à matemática escolar.

"A imagem do aluno como sujeito político [permitiu a Valero] salientar a importância que tem em se pensar a educação matemática como uma actividade sociopolítica que se cria e recria em múltiplas esferas de acção social que vão desde o microcontexto da sala de aula até ao macrocontexto das estruturas sociais, económicas, políticas e culturais onde a aula se inscreve" (Valero, 2002: 57). Com estes pressupostos torna-se difícil separar a esfera da investigação em educação matemática da da prática social do ensino na aula de matemática. Para Valero (2002) o ponto de encontro destas duas esferas de prática é a construção e reconstrução de discursos que se encontram e se influenciam mutuamente.

2.4 Literacia matemática

Apesar de haver um grande investimento na educação, pelo menos muito maior que umas décadas atrás, e das pessoas perceberem o valor da educação, ainda há muitos entraves a que todos tenham acesso à educação. Continua a verificar-se muito abandono escolar. A sociedade, os professores e os alunos ainda não constataram que o recurso ao abandono escolar não é solução para qualquer das partes: não é para o aluno que se descrimina negativamente não acedendo à educação a que tem direito; não é para a escola porque isso significa que há utentes para os quais o seu trabalho não ajuda ou, numa versão mais extremada, traz infelicidade e é considerada perda de tempo; não é para a sociedade que assim vê os seus cidadãos privados de um bem que deveria ser para todos. É a Escola que se quer inclusiva e não exclusiva; é a Escola que se quer tolerante e não descriminadora. Para os cidadãos que abandonam a Escola o(s) projecto(s) de literacia fica(m) automaticamente condicionado(s). Segundo Roldão (2003: 75) "a preocupação dos cidadãos terem acesso ao conhecimento e saberem usá-lo não nasce apenas do reconhecimento do direito e da vantagem individual de obter uma educação mais assente nas competências nas sociedades actuais, mas da própria pressão do desenvolvimento económico que requer cada vez mais uma qualificação de base mais consistente e mais ampla. As zonas de iliteracia – linguística, científica, informática, tecnológica, cultural – constituem, nos dias de hoje e no futuro próximo, problemas sociais e políticos que atingem a estabilidade das sociedades e dos governos, guetos que bloqueiam um desenvolvimento equilibrado, fontes de novas áreas de conflito e exclusão que afectam a qualidade da vida de todos os cidadãos, a começar pelos próprios sujeitos dessa exclusão".

Há outra franja de alunos que, apesar de escolarizados, sentem muitas dificuldades em usarem as suas aprendizagens na vida do dia-a-dia, no emprego, no exercício da cidadania: estes são os analfabetos funcionais. Apesar de escolarizados as aprendizagens realizadas resumem-se a conhecimentos factuais que não são integrados como ferramentas operacionais na sua acção. O termo/conceito que é usado para este fenómeno é o de literacia. Durante muito tempo, e num paradigma positivista, partiu-se do pressuposto que se soubesse os conceitos espartilhados, atomizados, o aluno conseguiria usá-los na resolução de problemas, em situações problemáticas ou em contextos complexos e segmentos da realidade. Em todo este tempo verificou-se que o facto de se saber aspectos fragmentados de um dado conceito não significa que o aluno se aproprie do conceito em toda a sua complexidade. O facto de se saber resolver exercícios de todos os tipos não significa que se tenha competência para resolver problemas mesmo quando estes envolvam técnicas ou algoritmos já treinados. O facto de se saber ler (= juntar as letras) não significa que se compreenda a mensagem da frase ou que se consiga reflectir sobre o seu significado e conteúdos.

No âmbito do PISA[2] a *literacia matemática* é definida como a *aptidão* para

- *identificar e compreender o papel que a matemática tem no mundo,*
- *se poder raciocinar de forma fundamentada e*
- *usar de forma integrada a matemática que vá de encontro às necessidades de cada um como um cidadão reflexivo e empenhado no seu desenvolvimento (OCDE[3], 2005: 16).*

A concepção de literacia assente no *conhecimento em acção,* leva a centrar a alfabetização não na aquisição de conhecimentos mas na sua mobilização em diversas situações consideradas importantes na vida das pessoas, enquanto cidadãos activos e intervenientes. Para Serrazina e Oliveira (2005) no Currículo Nacional o conceito de literacia matemática é o mesmo do ser matematicamente competente ou de se ter

---

[2] PISA – Programme for International Student Assessment

[3] OCDE - (OECD em inglês) A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico ou Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Económicos é uma organização internacional dos países comprometidos com os princípios da democracia representativa e da economia de livre mercado.

competência matemática. Para Gravemeijer (1998) a literacia matemática concretiza-se através de uma atitude de matematização de situações do dia-a-dia e de outros temas, espontaneamente e de construção de critérios de identificação de quando essa matematização é ou não apropriada. Na mesma ordem de ideias o sentido geométrico implica uma estrutura relacional, entre outras coisas, a visão de linhas de referência, linhas de sombra, imagens mentais, vistas de lado, de topo e mapas. Assim, a atitude matemática para reflectir nos aspectos das situações da vida do dia-a-dia pode ser considerada como literacia na geometria e as questões para a desenvolver devem estar relacionadas com problemas aplicados a situações do dia-a-dia. Segundo Gravemeijer (1998) e na teoria da Educação Matemática Realista (Realistic Mathematics Education - RME), o foco no desenvolvimento em literacia na geometria exige a implementação de tarefas específicas.

2.5 Competência matemática

> *"O desenvolvimento sustentável e a coesão social dependem de forma decisiva das competências de toda a nossa população – entendendo-se competências abarcando conhecimentos, capacidades, atitudes e valores".* (Ministros da Educação da OCDE in OCDE (2005: 4))

No documento da OCDE (2005), e ao considerarem fundamental a pertinência de se definirem competências nos dias de hoje, referem a globalização e a modernização como tendo criado um aumento da diversidade num mundo consideravelmente ligado entre si. Por isso referem que é fundamental que os indivíduos, por exemplo, consigam integrar as mudanças tecnológicas e a grande quantidade de informação disponível de forma a que tenha significado e onde as sociedades são confrontados com desafios colectivos tais como a dependência do crescimento económico com a sustentabilidade do crescimento ambiental e com a prosperidade a partir da equidade social. Neste contexto, as competências que os indivíduos necessitam para alcançar os seus objectivos são cada vez mais complexas requerendo mais do que o conhecimento declarativo.

O termo competência é usado nos diferentes domínios com conotações diferentes (sociologia, psicologia e ensino profissional).

Segundo Roldão (2003: 24) "*a competência não exclui, mas exige a apropriação sólida e ampla do conteúdos, organizados numa síntese integradora, apropriada pelo sujeito, de modo a permitir-lhe «convocar» esse conhecimento face às diferentes situações e contextos*". O conceito de competência definido por Roldão pode considerar-se integrado nas competências cognitivas, na terminologia de Pureza (2002: 389). Teríamos de acrescentar competências ético-afectivas e competências sociais para completar o contrato socioeducativo, isto é, para que o sistema educativo formal e informal apetreche os alunos para exercerem a cidadania democrática (Pureza, 2002: 389). Também a OCDE (2005: 5) define três grandes categorias nas competências chave a desenvolver: o domínio do *usar ferramentas de forma interactiva* (como por exemplo, a linguagem e a tecnologia), o domínio do *interagir em grupos heterogéneos* e o domínio do *agir com autonomia*. Estas três grandes categorias não são isomórficas às de Pureza uma vez que nestas categorias da OCDE poderíamos ter sempre competências cognitivas, ético-afectivas e sociais. Neste documento da OCDE explicita-se que é fundamental e central, na estrutura conceptual das competências, pensar e agir reflectidamente. Nesta concepção de competência está implícito o saber em acção. As competências são definidas e explicitadas em três grandes categorias, uso de ferramentas interactivamente, interacção em grupos heterogéneos e acção de forma autónoma, do seguinte modo:

"*Primeiro, os indivíduos necessitam de ser capazes de usar bastantes ferramentas para agirem efectivamente com o ambiente: tanto ferramentas físicas como socio-culturais como por exemplo a linguagem. Precisam de compreender essas ferramentas de tal maneira que as possam usar para os seus próprios propósitos –* ***usar as ferramentas interactivamente****. Segundo, num mundo cada vez mais interdependente, os indivíduos necessitam de ser capazes de se relacionarem com outros, e daí poderem encontrar com diferentes backgrounds, e por isso é importante que* ***seja capaz para interagir em grupos heterogéneos****. Em terceiro lugar, os indivíduos necessitam de ser capazes de assumir responsavelmente as suas próprias vidas, de situarem as suas vidas num contexto social alargado e* ***agirem autonomamente***" (OCDE, 2005: 5).

Do mesmo modo um ensino por competências requer um programa bem definido num currículo explicitado. As competências não são algo que se acrescenta por justaposição; pretende-se que haja a reformulação do programa e do currículo para o desenvolvimento e formação de cidadãos competentes, isto é, capazes de se integrarem na sociedade com as ferramentas que a escola lhes proporcionou. Cidadãos críticos, isto é, capazes de se apropriarem da informação disponível, saberem analisá-la, interpretarem-na e tomarem decisões consequentes.

3. Desenvolvimento curricular em matemática

O fenómeno da Educação Matemática pode ser reconhecido como um sistema dinâmico cujo funcionamento se caracteriza pela não linearidade no seu desenvolvimento e por um conjunto de interacções complexas na sua estrutura.

Para Azcárate (1995) é fácil reconhecer que existem muitas mais variáveis na acção educativa que contexto, actores (professor e alunos) e disciplina (conteúdos): as ideias prévias dos alunos e do professor, concepções, crenças e atitudes; a auto-estima; o nível de aceitação dos erros; o nível e o tipo de organização na sala de aula; a inovação e o desenho de intervenção; as actividades e o material a utilizar; as interrelações. Todos estes aspectos são questões que incidem no processo de ensinar e aprender matemática e ao reflectir sobre elas e as suas interacções emerge, pouco a pouco, mas com firmeza, a ideia de complexidade inerente a todo o sistema aberto em contínuo intercâmbio com o meio.

Fundamentados em resultados da investigação em Educação e indicações de diferentes estudos e de diferentes peritos em Educação Matemática, os pressupostos de que partimos, são:

- Utilização de outras tipologias de trabalho que não a exposição, aplicação-verificação ou apresentação de tarefas rotineiras;
- Abandono da propriedade individual do professor sobre o espaço e o tempo da «sua» aula;
- Abandono da segmentação como critério de organização do tempo e do espaço;
- Abandono da distribuição unidireccional – e largamente inerte ou retórica e mecânica – da informação, do discurso e da pergunta;
- O uso de materiais manipuláveis e/ou tecnologias para permitir a mobilização de maior número de sentidos sensoriais (tacto, visão) em simultâneo com o processo de reflexão sobre a actividade proposta: a aprendizagem e a reconstrução do conhecimento faz-se através da experiência matemática quer cognitiva quer física;
- Organização do espaço e do tempo escolar em formatos diversos (pequeno grupo, pares, seminário e apresentações por professor e alunos, horas e tempos dedicados a actividades determinadas e flexíveis);
- Organização do trabalho do professor em termos de (1) disponibilização consistente e organizada do saber científico e de modos de a ele aceder; (2) passagem da

informação estruturante; (3) apoio/tutorização de grupos de alunos por professores que, de facto, orientem percursos de aprendizagem individuais e interacções de alunos na construção do saber; (4) mecanismos constantes de regulação do trabalho desenvolvido e das aquisições e da sua apropriação e uso por todos os aprendentes (adaptado de Roldão, 2003: 34).

Também se assume no Currículo Nacional para o Ensino Básico (2001) que a renovação curricular e os seus objectivos só poderão ser alcançados se os alunos tiverem diversas oportunidades de viver experiências de aprendizagem adequadas e significativas.

Neste capítulo 3 abordaremos: num primeiro ponto o currículo (3.1) relevando as situações de aprendizagem, o tipo de abordagens dos alunos ao estudo e as percepções que os alunos têm da sua situação de aprendizagem; num segundo ponto a experiência matemática (3.2) com alguns dos aspectos que nos merecem maior enfoque – conteúdo matemático, tarefas, mediação, competências, contexto do uso da matemática, recursos e avaliação; num terceiro ponto a relação entre a matemática, professor e alunos (3.3); num quarto e último ponto o papel da *critical friend* nas práticas de ensino (3.4).

3.1 Currículo

Falar de currículo não é tarefa fácil. De facto, quando falamos de currículo, de que currículo estamos a falar? E qual o seu contexto? Kilpatrick (1999: 19) apresenta uma maneira de olhar o currículo explorando diversos pontos de vista do que pode ser o currículo da Matemática escolar (quer como um conjunto de experiências projectado para promover a aprendizagem da Matemática, quer como o percurso que os alunos seguem) adopta os níveis usados no SIMS (Second International Mathematics Study):

- Currículo enunciado – onde se evidencia o ponto de vista do administrador;
- Currículo implementado – onde se evidencia o ponto de vista do professor;
- Currículo adquirido – onde se evidencia o ponto de vista do aluno.

Aliás esta categorização é apresentada por Ponte *et al.* (1998). Kilpatrick ao adoptar esta decomposição do currículo de acordo com a perspectiva dos participantes explicita que ela assenta num pressuposto de que o poder curricular flui directamente do administrador para o professor e deste para o aluno propondo uma visão de cima para baixo e mantendo o professor como um funcionário obediente. Para Kilpatrick o currículo enunciado não é de facto um currículo mas apenas um esquema de um currículo a realizar. Socorre-se de uma analogia para clarificar a sua posição, dizendo que "*o currículo* *enunciado está para o currículo real assim como o plano do arquitecto está para o edifício*” (Kilpatrick, 1999: 20)

De acordo com Alsina (2000: 14), fundamentado-se em vários autores, são distinguidos quatro tipos de currículo integrados em outros tantos contextos: o currículo oficial (nos documentos regulamentares), o currículo potencial (que fica determinado por diversas publicações, incluindo os manuais), o currículo implementado (que corresponde ao que o professor desenvolve) e o currículo aprendido (que corresponde ao que fica aprendido pelo aluno).

Tanto Kilpatrick como Alsina consideram que o mais determinante não é o currículo enunciado/oficial. Para estes autores, o currículo enunciado/oficial tem um impacto bastante relativizado nas mudanças necessárias; afirmam que é muito mais importante dar atenção aos restantes níveis/tipos de currículo. Kilpatrick vale-se de uma outra imagem para tentar elucidar o seu pensamento no que respeita ao currículo comparando o currículo enunciado à superfície das águas do oceano e o currículo adquirido ao que se passa nas profundezas desse oceano: pode haver mudanças profundas na superfície do oceano (refere em particular um tsunami) e as profundezas não terem sofrido qualquer mudança curricular. Alsina afirma que é muito mais importante prestar atenção aos outros três tipos de currículos sem esquecer o currículo oculto que está sempre presente e é de grande eficiência.

Já Gimeno-Sacristán (2000: 101-106), assume que um currículo nunca é neutro e apresenta um modelo de desenvolvimento curricular com base numa concepção processual do currículo considerando diferentes tipos de currículos, cada um resultante da acção de diferentes intervenientes: currículo prescrito (ditado pelos orgãos político-administrativos); currículo apresentado (o que chega aos professores através de meios ou materiais curriculares – manuais escolares); currículo organizado ou moldado (o que resulta da interpretação do professor); currículo em acção (o que é determinado e praticado na realidade escolar); currículo avaliado (é aquele que é valorizado por ser nele que incidem os testes ou avaliações externas – impõe critérios de relevância para o ensino do professor e para a aprendizagem dos alunos). Esta estruturação do currículo é mais complexa que a apresentada quer por Kilpatrick quer por Alsina. Gimeno-Sacristán assume que, de todos os decisores curriculares, o professor é, sem dúvida, o mais determinante no desenvolvimento do currículo, aquele que põe em acção na sala de aula.

Serrazina e Oliveira (2005, 47) falam em desenvolvimento curricular no qual integram "*não só o desenho de currículo mas também a investigação realizada nas salas de aula, donde resulta a criação de materiais curriculares e a produção de novo conhecimento sobre o ensino-aprendizagem*". Nesta concepção, o desenvolvimento curricular vai ocorrendo de um modo gradual integrando a teoria e a prática. O objectivo de alterar as práticas está implícito no do desenvolvimento curricular. Assim, identificam o currículo a partir do que é proposto por Pacheco (1996 - in Serrazina e Oliveira) como "*um projecto, cujo processo de construção e desenvolvimento é interactivo, que implica unidade, continuidade e interdependência entre o que se decide ao nível do plano normativo, ou oficial, e ao nível do plano real, ou do processo de ensino-aprendizagem*". Acabam por explicitar que definem currículo como conjunto de aprendizagens, consideradas necessárias num dado contexto e tempo, bem como a organização e sequência adoptadas para o concretizar e desenvolver: a sua finalização, intencionalidade, estruturação coerente e sequência organizadora são elementos essenciais para que de facto constitua um currículo.

O conceito que adoptaremos será o de Serrazina e Oliveira por ser dinâmico na sua concepção e por estarmos convictos que é importante investir numa mudança curricular que comporte as crenças, convicções do professor que implementa numa leitura interpretativa das exigências, finalidades do currículo nacional proposto numa lógica de investigação-acção: de reflexão sobre a teoria e pressupostos teóricos para clarificar as opções da prática; tomar decisões e planificar o trabalho a realizar na sala de aula; implementar e fazer o ponto da situação sobre o trabalho realizado; avaliar a prática, fazer ajustes de acordo com os pressupostos teóricos; aprofundar novamente o conhecimento didáctico e contrapor com o que se obtém da prática ...

Segundo Roldão (2003: 76) a inserção ou a exclusão social do futuro definem-se pelo acesso ou não acesso aos bens do conhecimento que são o marcador de diferença no sucesso pessoal, profissional e social. É neste quadro que devem ser lidas as novas tendências curriculares recentes no sentido de reorientar o trabalho na escola para aquilo que de facto legitima a sua existência social – tornar todos os cidadãos de uma sociedade dita do conhecimento efectivamente dotados das competências que lhes permitirão viver com mais qualidade e inteligência. Neste ponto e integrados no currículo iremos abordar especificamente as situações de aprendizagem proporcionadas que podem dar sentido à aprendizagem e nestas referiremos que tipo de abordagens os alunos fazem ao estudo e quais as percepções que os alunos têm acerca das situações de aprendizagem a que estão sujeitos.

3.1.1 Situações de aprendizagem

São as situações que são trabalhadas que dão sentido à aprendizagem. Para Vergnaud (1996, 218) "*os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com as quais são confrontados*" dando ênfase a duas ideias principais:

- **a de variedade**: existe uma grande variedade de situações num dado campo conceptual e as variáveis de situação são um meio de gerar de maneira sistemática o conjunto de classes possíveis;
- **a de história**: os conhecimentos dos alunos são formados nas situações com que eles se depararam e foram sendo estruturados progressivamente, especialmente pelas primeiras situações susceptíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que se querem ensinar.

Apesar da especificidade das aprendizagens matemáticas estar na matemática em si mesmo, para Vergnaud, isso não significa que a teoria da aprendizagem matemática esteja totalmente contida na matemática. Para Vergnaud, a par da ideia de diversidade, aparece a ideia de história: Vergnaud, esclarece que não se trata da história da matemática mas da história de aprendizagem da matemática. Esta história é individual e específica de cada aluno. A interacção entre cada aluno e o contexto de ensino e aprendizagem constitui uma situação de aprendizagem única para esse aluno. Alunos num mesmo contexto de ensino e aprendizagem vivenciam situações de aprendizagem diferenciadas uma vez que as interacções envolvem as respectivas experiências anteriores, as suas percepções, as suas abordagens e os resultados das respectivas aprendizagens. Isto é, cada aluno tem uma percepção única da sua situação, que não pode ser descrita independentemente de si e do contexto que vivencia. As relações entre os diferentes elementos caracterizadores de cada aluno são simultâneas; todos os aspectos da situação de cada aluno estão permanentemente presentes, embora em determinados momentos uns possam prevalecer sobre outros.

O modelo apresentado na Figura 3.1 (pág. 23) permite explicitar a variação que existe nos actos individuais de aprendizagem: assim, variações na percepção da sua situação e variações nas suas experiências anteriores, levam o aluno a invocar, ou a trazer para primeiro plano aspectos que levam a variações nas abordagens à aprendizagem e a variações na qualidade de aprendizagem.

3.1.1.1 As abordagens dos alunos ao estudo

Os alunos nas suas actividades de estudo optam por diferentes abordagens à aprendizagem. Rosário (1999) caracteriza quatro grandes linhas no estudo dos processos de ensino-aprendizagem, tendo por base uma classificação de Biggs (1994). Depois de analisar detalhadamente os referenciais refere-se ao referencial sistémico como sendo uma abordagem onde os traços pessoais, factores de contexto, níveis de processamento e a qualidade dos resultados são encarados como formando um sistema aberto e recursivo, no qual os indivíduos ajustam as suas intenções e estratégias de processamento às exigências das tarefas.

O trabalho de Biggs e de vários outros investigadores apoiaram-se em questionários para avaliar as diferentes abordagens à aprendizagem e ao estudo; Biggs centrou-se nos processos desenvolvidos pelos alunos e apresentou um modelo de um sistema de aprendizagem do aluno centrado em três componentes principais distintos: as variáveis de **p**resságio, as variáveis de **p**rocesso e as variáveis de **p**roduto. Este modelo é designado de modelo **3P** (ver Figura 3.1 - pág. 23) porque as três componentes principais se escrevem inicialmente com a letra **P**. Na ecologia de um sistema, uma mudança em qualquer dos seus componentes provoca alterações nos outros elementos. As salas de aula são sistemas sociais abertos à mudança podendo atingir estados de grande heterogeneidade e complexidade mas tendendo a alcançar um estado de equilíbrio onde seja possível trabalhar. No sistema escolar podem ser identificados subsistemas, tais como o sistema aluno, compreendendo equilíbrios entre os aspectos cognitivos, afectivos e percepção dos fenómenos vivenciados; o sistema da sala de aula que compreende os alunos, os professores e o contexto de aprendizagem; o sistema institucional e o sistema da comunidade. Rosário (1999), fundamentada no trabalho de Biggs, refere que há uma dinâmica em que cada um destes sistemas visa alcançar o equilíbrio interno entre os seus componentes mas também um equilíbrio com os outros subsistemas: a compreensão desta dinâmica é fundamental para perceber o alcance das intervenções escolares.

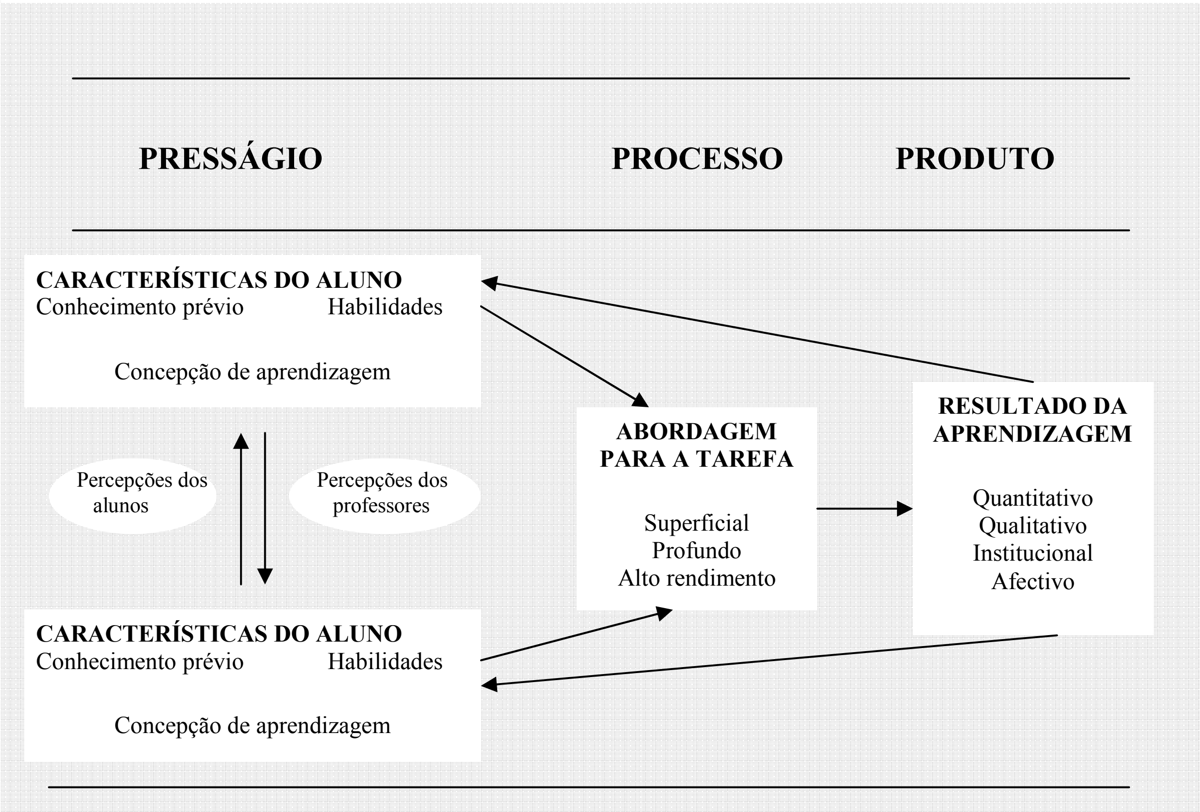


Figura 3.1: Modelo 3P da aprendizagem do aluno (adaptado de Biggs, segundo Rosário)

O modelo de aprendizagem apresentado na Figura 3.1 explicita diferentes processos salientando algumas variáveis: no que respeita ao presságio são referidas variáveis que existem previamente à aprendizagem e incluem: i) factores pessoais relativos aos alunos; ii) factores situacionais relativos ao contexto de aprendizagem; com estas variáveis os alunos interpretam o contexto de ensino e com as suas pré-concepções, motivações e expectativas enfrentam o processo de aprendizagem a partir de tarefas específicas de aprendizagem.

No processo de aprendizagem estão patentes as variáveis de processo tendo os alunos estilos de abordagem às tarefas que têm a ver com as formas como encaram a aprendizagem: superficial, profunda e de alto rendimento. Enquanto que uma abordagem superficial caracteriza-se pelo propósito de satisfazer as tarefas escolares de uma forma rápida e com o menor esforço possível, a abordagem profunda tem como fim maximizar a compreensão e está baseada no interesse no conhecimento em si mesmo e a abordagem de alto rendimento visa a manifestação da própria competência na obtenção das melhores classificações académicas.

A última componente compreende as variáveis de produto e o resultado da aprendizagem: quantitativo, qualitativo, institucional e afectivo. Os resultados da aprendizagem serão assim determinados quer por factores de presságio, relativos à história de aprendizagem e às características do aluno em causa quer pelo processo de aprendizagem (Rosário (1999)).

A predisposição para a opção de uma determinada abordagem à aprendizagem corresponde ao equilíbrio percebido pelo aluno de um determinado sistema escolar.

3.1.1.2 As percepções dos alunos acerca da sua situação de aprendizagem

Os objectivos pessoais, as auto-percepções de competência, os estilos de ensino, os modos de avaliação, os resultados e as atribuições dos alunos desses resultados, entre outros dados, configuram um ambiente face ao qual os alunos optam por uma determinada abordagem às tarefas de aprendizagem na qual se sintam confortáveis ao lidar com tal ambiente. Para Rosário (1999), esta é a razão pela qual as respostas aos questionários, conceptualizados como variáveis de presságio ou independentes, podem ser utilizadas para aceder aos ambientes de ensino como um resultado ou variáveis dependentes. Para o mesmo autor e fundamentado em investigação na tradição das abordagens dos alunos à aprendizagem que refere que uma aprendizagem baseada na resolução mecânica de problemas está associada com abordagens superficiais e baixos resultados; por outro lado, resultados escolares elevados, estão associados com as abordagens profunda e de alto rendimento (Rosário (1999)). Também Rosário (1996) verificou que muitos alunos do ensino superior, em Portugal, encontraram equilíbrio face ao contexto de aprendizagem optando por abordagens superficiais. Este resultado foi detectado em outros estudos que versavam o ensino superior. Por outro lado, abordagens profundas e de alto rendimento são associados com o gosto pela escola, as percepções de utilidade da escola e da justiça de avaliação realizada pelos professores. Claro que este tipo de relações pode ser questionado uma vez que a dinâmica existente numa sala de aula é bastante complexa e a linearidade causal apresentada pode ser acusada de ingénua; no entanto poderá constituir-se como um indicador forte que triangulado com outros dados e de outras fontes permitirão inferir conclusões mais sólidas.

Segundo Cravino (2004) uma tarefa central do ensino consiste, assim, em determinar as percepções que os alunos formam da sua situação de aprendizagem. Para diagnosticar e avaliar as percepções dos alunos acerca das situações de aprendizagem que vivenciam têm sido desenvolvidos diversos questionários (Rosário (1999); Cravino (2004); Koul e Fischer (2006)). As percepções também podem ser recolhidas na sala de aula através da mediação realizada pelo professor ou mesmo fora da sala de aula através de conversas informais entre o professor e o aluno. Passaremos de seguida a fundamentar o estudo das percepções.

Segundo Koul e Fisher (2006) esta abordagem metodológica é fundamentada no modelo perceptual do processo de aprendizagem de Walberg's (1976) que advoga as percepções dos alunos para avaliar os ambientes. Para Walberg's (1976) os alunos parecem ser completamente capazes de perceber e ponderar o estímulo e darem julgamentos válidos preditivos do ambiente social das suas salas de aula.

As razões apresentadas por Rosário (1999) para se usarem as percepções dos actores educacionais são as seguintes:

- os alunos e professores estão em vantagem para fazerem julgamentos acerca das salas de aula e das escolas uma vez que estão imersos nessa atmosfera por largos períodos de tempo o que os leva a ter opiniões formadas a partir de uma longa exposição. Esta abordagem contrasta com as curtas observações que muitas das vezes estão associadas ao recurso de observadores externos (em uma ou duas aulas). A partir de uma perspectiva metodológica, isto significa que os habitantes do meio têm mais dados que resultam na formação de julgamentos;
- o uso das percepções dos professores e alunos tem maior vantagem sobre as notas, códigos e percepções de observadores externos uma vez que os alunos e os professores actuam na base das suas próprias percepções. Coerentemente, a avaliação dessas percepções como determinantes do comportamento são preferíveis àquelas relatadas por um observador externo que fará a avaliação da realidade da sala de aula;
- as percepções do ambiente de sala de aula que foram determinantes para proporcionarem maior variedade nos resultados de aprendizagem dos alunos têm menos variáveis directamente observáveis. Os estudos de Fiedler's (1975) acerca das interacções na sala de aula mostraram que as percepções dos alunos acerca das suas próprias influências na sala de aula, mas que não eram avaliadas pelos observadores externos, previram os ganhos académicos (Walberg, 1991). Walberg concluiu que os estudos de baixa inferência que

usaram observadores podiam ser abordagens limitadas à compreensão dos ambientes de sala de aula. Que os alunos são capazes de fazer juízos sumários válidos acerca da escolarização que é melhor esclarecida pelos componentes do ambiente de sala de aula.

3.2 Experiência matemática

Na mesma lógica do currículo nacional (DEB, 2001) valoriza-se o empenhamento dos alunos em diversas experiências de aprendizagem, tais como actividades de investigação, realização de projectos e jogos e a possibilidade de acederem a aspectos da história, do desenvolvimento e da utilização da matemática através do seu reconhecimento na tecnologia e nas técnicas. Do mesmo modo se valoriza a realização de trabalhos sobre a Matemática e a sua história. Nestes diferentes tipos de experiências devem ser considerados aspectos transversais da aprendizagem desta disciplina, nomeadamente a comunicação matemática, a prática compreensiva de procedimentos e a exploração de conexões. A experiência matemática, inspirada na obra de Davis e Hersh (1995), pode ser clarificada em dois movimentos complementares e inter-relacionados: (i) vivência de "manipulação" de objectos reais através dos sentidos (tacto, visão), com recurso a materiais diversos e/ou de objectos imaginários com recurso à mente: números, rectas, planos, formas e figuras geométricas, etc.; (ii) reflexão e compreensão mentais acerca de objectos imaginários, suas propriedades, suas relações, padrões, etc. O aprofundamento e compreensão conceptuais conseguem-se não pela definição rigorosa (e muitas vezes sem significado para os aprendizes) mas pela diversidade de experiências de aprendizagem proporcionadas aos alunos de forma a poderem apreender a complexidade dos conceitos e processos matemáticos fundamentais para a aprendizagem da matemática.

O documento "Matemática 2001 – diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática", no seu ponto 3, apresenta como recomendações

"*3.1 A prática pedagógica deve valorizar tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos (nomeadamente resolução de problemas e actividades de investigação) e que diversifiquem as formas de interacção em aula, criando oportunidades de discussão entre os alunos, de trabalho de grupo e de trabalho de projecto.*

3.2 A prática pedagógica deve utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados (nomeadamente situações da realidade e da História da

Matemática) e a utilização de materiais que proporcionem um forte envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente materiais manipuláveis, calculadoras e computadores" (APM,1998: 42)

Dez anos antes, na *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988), referia-se que "*o elemento central da renovação do ensino da Matemática deve ser a alteração da natureza das tarefas dominantes na sala de aula, na perspectiva de valorização das actividades de resolução de problemas e de investigação e de situações que envolvam os alunos em processos de pensamento matemático e comunicação*".

A experiência matemática a proporcionar aos alunos tem de estar centrada em tarefas no sentido atrás descrito. No entanto a execução das tarefas necessita de recursos adequados; as tarefas são propostas pelo professor (problematizador dos saberes) com determinadas finalidades quer no que respeita a conceitos quer no que respeita a processos e métodos. Aqui o papel do professor como mediador do ensino aprendizagem é, também, fundamental e será o garante de que a actividade realizada pelos alunos seja significativa e que sejam devidamente exploradas as conexões matemáticas. Ao falar de experiência matemática fá-lo-ei no âmbito e termos acima referidos: centrada em tarefas devidamente seleccionadas, com determinados intuitos, e tendo-se sempre presente que a mediação do professor é fundamental em toda a actividade realizada pelos alunos em sala de aula.

De seguida iremos deter-nos sobre algumas dimensões do currículo, fundamentais, a considerar na experiência matemática a proporcionar, a saber: conteúdo matemático, tarefas, mediação, competências, contexto do uso da Matemática, recursos e avaliação.

3.2.1 Conteúdo matemático

O conteúdo matemático é a designação que englobará não só os conceitos, estruturas e ideias matemáticas como os processos, o contexto de uso e/ou de produção. No PISA (2003) definem o conteúdo matemático em torno de quatro ideias abrangentes: quantidade, espaço e forma, mudança e relações e incerteza. Já no Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001) estruturam-no em torno de quatro grandes temas que podem ser definidos de forma "isomórfica" com os do PISA, a saber: números e cálculo, geometria, álgebra e funções e estatística e probabilidades. Quer o Currículo Nacional quer o PISA centram-se em competências e no seu desenvolvimento.

O desafio que Azcárate (2005) propõe é que, como educadores matemáticos:

- apresentemos uma matemática escolar orientada para capacitar os cidadãos a pensar, falar, sentir e actuar frente aos desafios que apresentam o nosso tempo e o deles, facilitando a construção significativa de novas formas de pensar, falar e sentir e actuar que permitam explicar e transformar o mundo que nos rodeia e que os rodeará no futuro;
- deveremos participar e incidir na formação de cidadãos para se moverem num mundo dominado pela incerteza e proporcionar que os nossos alunos adquiram competência e capacidades matemáticas necessárias para se integrarem de forma activa e crítica nessa sociedade (Bonil *et al*., 2004).

A experiência matemática intensa e variada e a respectiva reflexão segundo Veloso, (1999) devem incidir sobre

- A história da matemática;
- Os seus próprios processos de desenvolvimento – modelação matemática, procura de invariantes, descoberta de conexões dentro da matemática e utilização da analogia, generalização e abstracção;
- As suas características como ciência – o papel da intuição e da dedução em matemática, a importância e carácter das definições e demonstração, e a estrutura axiomática.

Nesta perspectiva, portanto, e segundo o mesmo autor, a aquisição de técnicas e de proficiência de cálculo, ou mesmo de conhecimentos específicos de conceitos ou resultados matemáticos, não constitui finalidade em si mesma, mas apenas na medida em que seja estritamente necessária para aquela formação geral, que tem portanto um carácter eminentemente cultural.

A complexidade (Azcárate, 2005) introduz na análise da actividade matemática novos focos de atenção que animam a realizar mudanças em novas direcções, por um lado a investir em novos temas, factos e representações a trabalhar com os alunos e outra ênfase na necessidade de estabelecer pontes com disciplinas diferentes e seus correspondentes modelos interpretativos. Por outro lado, introduz novas dimensões na forma de imaginar a formação do pensamento matemático dos alunos orientando-os para a formação de um pensamento complexo e para a configuração da linguagem necessária para expressá-lo e conformá-lo. Por último, o paradigma da complexidade incentiva a recuperar o papel das emoções como elemento central no processo de construção do conhecimento matemático.

3.2.2 Tarefas

A instrução é importante mas educacionalmente bastante limitada. Em termos sociais são as tarefas que moldam o significado do currículo e têm o poder de sustentar a prática. A realização de um leque variado de tarefas fechadas acessíveis e rotineiras, bem como abertas, desafiantes e não rotineiras, como explorações e investigações (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003), é necessária para promover nos alunos aprendizagens a diferentes níveis cognitivos e afectivos.

As tarefas a propor deverão ser escolhidas/construídas e elaboradas tendo em atenção alguns aspectos fundamentais para que o currículo permita que o aluno possa ter contacto com diversas formas de raciocínio matemático através de actividades diversificadas que tenham em consideração, sempre que possível, as aplicações de matemática na vida social.

O professor ao planificar uma aula ou uma sequência de aulas tem de tomar algumas decisões. Segundo Douady e Parzysz (1998) há um conjunto de questões a que o professor deve responder para fazer uma determinada escolha:

- "Quais são os objectivos da situação para os alunos: conhecimento novo, um novo método, implementar alguma coisa previamente aprendida, trabalhar conjuntamente coisas que foram aprendidas separadamente?
- Quais os procedimentos que os professores querem que os alunos usem? Que atitudes querem que eles adoptem: iniciativa, controle, procura de consistência? Que modos providencia para que o aluno o faça?
- Que meios devem utilizar para relembrar as acções dos alunos que foram eficazes, para providenciar uma explanação para a distância entre o que ele esperava e o que os alunos fizeram, para avaliar a compreensão em termos de objectos matemáticos e em termos de ferramentas matemáticas disponíveis?

Também para Ponte (2005), o professor ao fazer a planificação de uma unidade didáctica, considera necessariamente diversos elementos. Alguns desses elementos são de ordem curricular (nomeadamente, as indicações constantes dos documentos curriculares oficiais), outros têm a ver com os alunos com que trabalha, outros ainda com as condições e recursos da escola e da comunidade, incluindo os materiais curriculares, manual escolar e outros materiais e, finalmente, outros dizem respeito a factores do contexto escolar e social.

Para Douady e Parzysz (1998) o professor escolherá uma situação ou um conjunto de problemas de acordo com os objectivos de ensino e expectativas acerca do que os alunos são capazes de fazer. E para cada escolha realizada tendo em atenção o aluno/alunos, poderá decidir se os alunos trabalharão individualmente, em grupos, ou num modo de envio/recepção comunicacional. Ele previrá modos de cada aluno abordar o trabalho: troca de ideias, confrontação, difusão, trabalho colectivo. Posteriormente poderá alterar o planificado, complementar, ou rever antes de institucionalizar o objectivo fundamental da situação de ensino.

Ao definir as tarefas a propor, o professor interpreta o currículo e estabelece as regras que definem o ambiente de aprendizagem dos seus alunos. Deste modo o currículo concretiza-se através das tarefas, dos recursos que as envolvem, das dificuldades enfrentadas e dos significados que o professor tem face a determinados valores educativos, sejam eles no sentido estrito, apenas ligados aos conteúdos programáticos, ou em sentido lato, integrando atitudes e valores que o professor deseja que os seus alunos desenvolvam. São estas as razões que levam a Gimeno-Sacristán (2000: 211-212), a considerar que as tarefas:

1. Definem um microambiente na aula, por ser através delas que se caracteriza um determinado modelo de ensino e de aprendizagem;
2. Configuram, pela repetição da sua sequência, uma metodologia e a regularidade destas desencadeia efeitos prolongados;
3. Medeiam a concepção que os alunos fazem da escola e do currículo;
4. Expressam o estilo dos professores e articulam as suas competências profissionais, apelam à interacção das propostas didácticas e curriculares com os aspectos organizativos;
5. Realizam-se em determinados modelos de organização e exigem modelos de organização e/ou ambientes diferentes e específicos;
6. Têm um significado pessoal e social complexo, pelas normas de comportamento que exigem, que fomentam e pelos valores que possuem. Assim, a estrutura das tarefas para concretizar o currículo é, em simultâneo, uma estrutura de socialização para os alunos e para os professores.

Almiro (2005) salienta a importância de diversos aspectos relacionados com a implementação das tarefas, a saber: a forma como as tarefas são propostas; a forma de organização do trabalho na sala de aula; o ambiente de aprendizagem proporcionado; as características dos alunos e, em particular, as suas capacidades e experiências anteriores; os papéis assumidos pelos alunos na resolução das tarefas e pelo professor nas propostas de tarefas apresentadas. Isto é, apesar das tarefas serem muito importantes é fundamental ver como são implementadas e como são exploradas.

3.2.3 Mediação

A dinâmica estabelecida dentro da sala de aula pode permitir ambientes mais ou menos ricos de aprendizagem. No entanto a gestão curricular que é realizada tem de ser planificada e numa fase posterior implementada e avaliada. Os papéis assumidos pelos protagonistas dentro da sala de aula, o professor, cada aluno e todos os alunos caracterizam, de forma inequívoca, a qualidade e a diversidade do que se aprende e como se aprende. Apesar de nos focarmos no que acontece dentro da sala de aula muito do que lá acontece é planificado e decidido fora dela. O ambiente de aprendizagem também não aparece de forma aleatória e quer tenhamos consciência ou não essa prática está contextualizada de forma social e cultural. Cada professor planifica o trabalho que irá realizar com os seus alunos em determinado período de tempo: longe vai o tempo em que o professor era um instrutor preocupado com os conteúdos a transmitir e com a avaliação do quanto os seus alunos ainda ignoravam mediante o que se tinha estabelecido como aquilo que deveriam saber (factualmente e de memória quer fossem factos, técnicas ou algoritmos); aos alunos restava-lhes somarem conteúdos, técnicas, algoritmos justapondo de forma lógica e sistemática os conhecimentos adquiridos. Para Zeichner, citado por Almiro (2005), a prática reflexiva não é fácil, pois a sala de aula é imprevisível, com grande actividade e muitos conflitos que obrigam os professores a tomarem decisões espontâneas a todo o momento, havendo limitações institucionais, como a falta de tempo, alunos a mais e a pressão para cumprir um dado currículo num determinado período de tempo. Apesar disso, afirma que mesmo com estes condicionalismos é possível ser-se um professor reflexivo e perceber em que medida é que dirigimos o nosso ensino para metas para as quais trabalhamos conscientemente ou se, pelo contrário, as nossas decisões são fundamentalmente dirigidas por outros, por convenção e autoridade, aceitando as coisas só porque estão na moda ou porque nos dizem para as fazermos, sem decidirmos qual o caminho certo. Isto é, a reflexão e metacognição que o professor faz são fundamentais para conscientizar o processo de mediação do professor.

Segundo a análise de Dumas-Carré e Weil-Barais (1998), a maior parte dos autores justificam o estudo das interacções pela consideração sobre a formação dos professores: torná-los mais conscientes, desenvolver neles uma atitude de tomar decisões adaptadas aos alunos, alargar o seu campo de práticas. Também a objectivação das práticas, que é uma condição necessária à transformação das mesmas, é assumida por outros autores. Pressupõe-se assim que se se melhorar a objectivação de uma prática, melhorar-se-á, consequentemente e correlativamente a prática. Sabemos que, da mesma maneira que há dificuldade de passar do saber fazer à conceptualização desse saber fazer, há, também, uma dificuldade inversa, que se situa na passagem do saber dizer ao saber fazer.

As incidências maiores da análise da mediação respeitam à concepção das actividades propostas na formação e às transformações das ligações entre os professores com os conhecimentos científicos. Dumas-Carré e Weil-Barais (1998) avançam com a hipótese que a objectivação das interacções educativas pelos professores os incitam a trabalhar as suas concepções pessoais sobre os domínios dos conhecimentos que eles ensinam. Em consequência, estas análises contribuem para a transformação da educação científica.

Douady e Parzysz apesar de considerarem importante a escolha de uma "boa" situação salientam que o papel do professor, nas suas interacções com os alunos, é essencial, não somente no que respeita à evolução da situação mas também com respeito à relação dos alunos com o conhecimento em causa. Assumem assim que uma boa gestão das interacções com e entre os alunos é fundamental e pode afectar a questão da reprodutibilidade das situações didácticas.

Na sociedade actual pretende-se que a escola forme cidadãos para o pleno exercício da democracia, sensíveis aos valores de solidariedade, tolerância, paz, respeitadores do meio ambiente que os circunda e investindo no desenvolvimento sustentável do seu local e planeta.

3.2.3.1 Mediação – o papel do professor

O currículo de matemática pressupõe conteúdo matemático a ser trabalhado. Apesar de alguns conceitos serem introduzidos num determinado ano e em sala de aula é certo que os alunos trazem de anos anteriores (tendo transitado ou não) conhecimentos diversos trabalhados em contexto escolar ou na sua vida do dia-a-dia. Uma das atitudes mais comuns é o professor planear a sua intervenção partindo do pressuposto de que os alunos estão na *estaca zero* e, por vezes, acabando por transformar as aulas em momentos fastidiosos quer para os que têm uma considerável aprendizagem da matemática quer para os que têm mais dificuldades. Neste item convém estar atento e ter em consideração os conhecimentos/saberes e saberes fazer dos alunos de forma a potenciá-los e a permitir o enriquecimento da utilização das ferramentas matemáticas em situações problemáticas. Ausubel (1980), na sua obra "Psicologia educacional", refere: "se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: o factor isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos".

O professor deve ser considerado um mediador no processo de ensino e aprendizagem na medida em que ele é um intermediário entre o "mundo" dos conhecimentos e das práticas científicas e os alunos (Dumas-Carré e Weil-Barais, 1998). Para Douady e Parzysz (1998), Ponte (2005), entre outros, o (in)sucesso de uma determinada organização didáctica depende fundamentalmente de dois factores: da escolha da situação e da sua análise *a priori* tendo em vista a sua implementação; da gestão da sala de aula e dos vários contratos didácticos que se desenrolarão ao longo do tempo em que é trabalhada a situação.

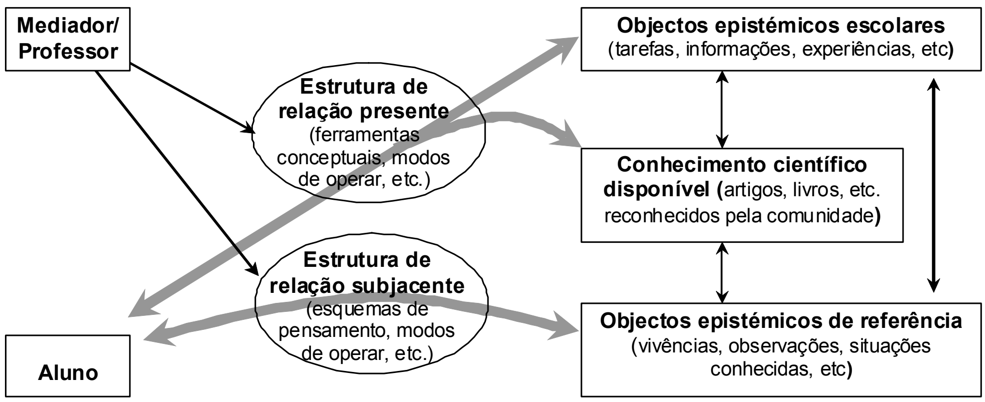


Figura 3.2: Estrutura da situação de conhecimento em contexto educativo
(Fonte: Lopes, 2004: 61)

Em Lopes (2004) encontramos a representação de uma estrutura da situação de conhecimento[4] (Figura 3.2) para o caso do ensino e da aprendizagem do conhecimento científico em contexto educativo (escolar ou não escolar).

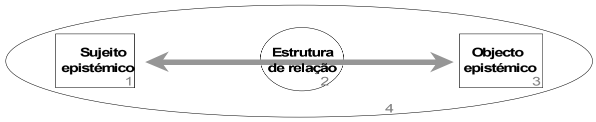
Nessa representação é evidenciado o papel do professor/mediador assim como a importância do sujeito epistémico (aluno individual, alunos em interacção entre si e o professor) não esquecendo os objectos epistémicos de referência (vivências, observações, situações conhecidas, etc.) do(s) aluno(s) e os objectos epistémicos escolares a serem proporcionados pelo professor/mediador.

O professor está presente e actuante em diferentes fases do processo do desenvolvimento curricular, tendo necessariamente que interpretar, gerir, planear, pôr em prática e avaliar as suas opções curriculares. Ao fazê-lo faz intervir as suas concepções, o seu saber e o seu conhecimento didáctico, que antes de mais são filtrados pelo seu eu profissional, que lhe dita o que deve, quer e pode fazer (Canavarro e Ponte, 2005: 86-88). Individualmente ou em conjunto com os colegas, é ao professor que compete adequar aos seus alunos e ao contexto escolar as orientações curriculares diagnosticando problemas, criando soluções, regulando a sua prática e criando cenários que muitas vezes se afastam das prescrições curriculares.

Os papéis desempenhados pelo professor na gestão da sala de aula vão desde a liderança à moderação da dinâmica proporcionada pelas tarefas propostas e pelos formatos de trabalho que as contextualizam (Douady e Parzysz, 1998). O professor actua como um líder, segundo Douady e Parzysz, quando coloca um problema, quando sistematiza os resultados que merecem ser relembrados; pode também provocar uma mudança para outro tema matemático, ou outro registo que permitirão um ponto de partida para uma possível demonstração.

A elaboração/preparação de tarefas de diversos tipos - resolução de problemas, actividades de investigação, realização de projectos e jogos, comunicação matemática, exploração de conexões com utilização das tecnologias e com recurso a materiais

[4] Estrutura de situação de conhecimento (Fonte: Lopes, 2004: 39 – fundamentado em Besnier (2000))
Os números assinalam a ênfase das diferentes correntes epistemológicas:
1 – racionalismo; 2 – estruturalismo; 3 – empirismo; 4 – construtivismo.



manipuláveis/tecnológicos – que promovam uma experiência matemática rica envolvem: "escolher uma situação ou mais; formular problemas e conceber propostas de trabalho que mobilizem os saberes disponíveis dos alunos; organizar os recursos a disponibilizar aos alunos, incluindo os recursos físicos (materiais manipuláveis e/ou tecnologias); antever os aspectos da construção/apropriação conceptual que é necessário mediar" (Lopes, 2004, 108).

A selecção das tarefas é um dos muitos problemas com que os professores se debatem, quando desenvolvem o currículo, condicionando, de certa forma, as actividades que os alunos irão desenvolver nas aulas de Matemática, com possíveis consequências para a sua aprendizagem. São vários os autores que realçam a importância desta selecção. Por exemplo, para Bishop e Goffree (1986), a actividade dos alunos será crucialmente afectada pela escolha que o professor fizer da tarefa, da situação e do contexto, pelo envolvimento que consiga criar nos alunos e pela maneira como venha a conduzir a actividade. De facto, a decisão que compete ao professor no que respeita à escolha das tarefas a propor é fundamental mas o trabalho realizado no decorrer da actividade proporcionada não é menos importante. Mais do que respostas espera-se que o professor através da sua mediação: "coloque questões auxiliares relevantes; encorage o envolvimento dos alunos; discuta e promova a discussão das respostas obtidas; sistematize informações relevantes, incluindo as sínteses teórico e práticas necessárias; faça aprofundamentos teóricos e práticos relevantes, pertinentes e adequados; avalie as aprendizagens e processos de forma sistemática" (Lopes, 2004, 106)

Também Ponte (2005) identifica dois grandes momentos na gestão curricular do professor: o que corresponde ao tempo de planificação do trabalho a realizar e o da gestão curricular na aula considerando vários pólos de atenção: o pólo dos objectivos e finalidades visadas, o pólo dos alunos e a sua relação com o professor e o pólo das tarefas propostas e dos materiais e recursos mobilizados. Nas preocupações de análise da dinâmica estes aspectos aparecem referenciados e até afirma que a gestão curricular feita na aula não é um simples trabalho de aplicação e controlo do trabalho de acordo com o plano previsto. O trabalho do professor na aula é um trabalho eminentemente criativo. Cabe-lhe explorar as situações que se desenvolvem, tirar partido das intervenções dos alunos, aproveitar as oportunidades que se lhe oferecem. Reformular os seus objectivos e a sua estratégia, em função dos acontecimentos na aula é ainda, portanto um elemento fundamental do processo de gestão curricular.

Azcárate (2005) salienta o papel fundamental do professor num contexto de complexidade. Assim o professor aparece como problematizador de saberes e como organizador de processos de partilha, interacção e reflexão crítica tendo um papel fundamental de mediação dos processos de aprendizagem dos alunos concretos com quem trabalha. O professor também assume um papel de moderador quando age de forma mais discreta permitindo que os alunos expressem as suas próprias ideias e tendo cuidado para permitir que todos os alunos falem e não somente alguns líderes. Douady e Parzysz (1998) constatam que há dificuldades numa gestão das discussões entre os alunos evitando explicitar as posições do próprio professor identificando que é necessária uma grande paciência e conhecimento por parte do mesmo. Referem, ainda, que é importante que o professor evidencie e explore as contradições entre os alunos; este tipo de contradições pode permitir desenvolver os conceitos e conceptualizações envolvidas. O facto dos alunos ficarem mais sensíveis para este tipo de manifestações é um sinal positivo na sua aprendizagem. Por último referem a atenção que o professor deve ter no uso de certos argumentos específicos bastante convincentes usados pelos alunos e que podem permitir deslizes perigosos, levando a que os alunos identifiquem a fragilidade ou falácia dos argumentos usados.

3.2.3.2 Mediação – o papel do aluno

Aprender para uma determinada pessoa significa aprender as coisas, de novo, por si própria e, neste sentido, o foco do trabalho realizado na sala de aula tem de ser o aluno. O que os alunos aprendem resulta de dois factores principais: a actividade que realizam e a reflexão que sobre ela efectuam (Ponte, 2005:11). A actividade proporcionada por tarefas de natureza diversa, devidamente seleccionadas, é fundamental mas a reflexão desempenha um papel de nível cognitivo superior que pode permitir e estimular o desenvolvimento do pensamento matemático quer na apropriação de novas ideias e conhecimentos quer na sua aplicação na resolução de situações problemáticas. Vários autores citados por Rocha e Fonseca (2005: 321) consideram que o momento de discussão com toda a turma é essencial para que os alunos reflictam sobre a actividade desenvolvida – partilhem ideias, raciocínios, processos e metáforas, estabeleçam conexões, comparações e analogias, construam e negociem significados, e desenvolvam capacidades de comunicar e argumentar (Bishop e Goffree, 1986; Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003; Santos, Brocardo, Pires e Rosendo, 2002; Tudella *et al.*, 1999). A discussão pode ocorrer em diferentes momentos da actividade, mas torna-se particularmente relevante na fase final, pois para além de constituir uma oportunidade de aprendizagem, influencia a visão que os alunos têm da Matemática e do significado de uma investigação matemática (Tudella *et al.*, 1999). A discussão permite aos alunos trocar ideias matemáticas uns com os outros e com o professor, raciocinar, formular conjecturas e novos problemas em conjunto, contactando com a Matemática como actividade humana em construção. É ao confrontar descobertas, estratégias e explicações com as dos colegas, que os alunos negoceiam e constroem significados indo, muitas vezes, para além das explicações dos outros (Bishop e Goffree, 1986). Veloso (1999) parte do pressuposto de que a matemática, isto é, a formação matemática é *para todos os alunos* e terá como finalidade a compreensão da natureza da Matemática. Essa compreensão atinge-se através de uma experiência matemática intensa e variada e da reflexão sobre essa experiência.

Também Cachapuz *et al.* (2002: 143) afirmam que o aluno deve ser activo assumindo um papel de pesquisa. Explicitam que o aluno deve ter capacidade de reflectir criticamente sobre as suas maneiras de pensar, de agir e de sentir. E mais uma vez se evidenciam o papel crucial quer da reflexão quer da metacognição no processo de aprendizagem. Ainda os mesmos autores (ibidem: 183) afirmam que "torna-se necessário que o aluno passe a desempenhar papéis que fomentem atitudes de responsabilidade partilhada e cooperativa, quer com o professor, quer com os seus pares, valorizando as suas capacidades de intervenção e de assumir papéis ao longo do *trabalho de pesquisa*. A dinâmica de grupo numa visão *vygotskiana* (e não o simples trabalho em grupo) com os seus conflitos, com um professor atento, constituem-se em valores de disciplina consentida e autónoma, responsável, reflexiva e crítica, de cidadania e de aprendizagem democrática duradoiras".

Mais do que aprender espera-se que o trabalho proporcionado na aula de Matemática, proporcione o desenvolvimento individual e social dos alunos através da apropriação, por todos os participantes, dos saberes que foram socializados na sala de aula – discussão de tarefas, negociação, comentários, argumentação e questionamento. A aprendizagem do aluno acontece de forma mediada por outras pessoas, com quem estabelece relações sociais (colegas, professores), e ainda por artefactos como materiais manipuláveis, instrumentos tecnológicos, propostas de trabalho, etc.

Spangler (1992), citado por Perez e Diogo (2005: 220), defende que considerar as crenças dos alunos pode ajudar os professores a planear metodologias de ensino e a estruturar o ambiente na sala de aula de modo a desenvolver concepções mais esclarecidas acerca da Matemática e do que é aprender Matemática. Considerar as crenças e convicções dos alunos quer no que respeita ao aprender matemática, ao ensinar matemática e ao que é matemática é fundamental para compreender o comportamento de facilitação ou impedimento da dinâmica protagonizada pelo professor na sala de aula. Tal como Azcárate (2005: 148) referiu para a pessoa do professor poderíamos afirmar que nos alunos há muitas resistências internas, e às vezes inconscientes, à mudança como as suas concepções sobre ensino, sobre a aprendizagem, sobre a natureza do conhecimento matemático, sobre a avaliação, sobre a dinâmica da sala de aula, etc. O professor terá de estar atento para perceber como essas resistências estão a actuar para ajustar a mediação a realizar.

Há fundamentalmente duas espécies de interacções que envolvem os alunos: com os professores (respondendo ou fazendo perguntas) e entre eles (Douady e Parzysz, 1998: 172). Os momentos de discussão constituem, assim, oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento (Ponte, 2005). Ao contrário da exposição ou do questionamento, em que o professor assume um papel de protagonista central, a discussão pressupõe um muito maior equilíbrio de participação entre ele e os alunos (Ponte, 2005). Os momentos de discussão na turma em que os alunos apresentam o seu trabalho, relatam as suas conjecturas e conclusões, apresentam as suas justificações se questionam uns aos outros podem ser aproveitados pelo professor para procurar que se clarifiquem os conceitos, os procedimentos, se avalie o valor dos argumentos e se estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática. Os momentos de discussão durante a realização de tarefas abertas, de carácter exploratório e investigativo, durante o trabalho de pares e/ou em grupos permite que os alunos confrontem as suas posições (conceptuais, de procedimentos, de argumentação, etc.) e, eventualmente, organizem o seu raciocínio, troquem de pontos de vista, aprendam a argumentar, etc. A objecção de um aluno, ou sua compreensão/incompreensão de determinado assunto apresentado por outro colega força a que haja uma explicação ou mesmo uma reformulação mais clara, mais organizada para que se consigam ultrapassar os conflitos de compreensão (Douady e Parzysz, 1998); podem ser usadas várias formas de demonstração, de diferentes níveis de raciocínio formalizado ou recorrendo a configurações visuais ou outro tipo de recursos. Com este tipo de discussões os alunos podem começar a aperceber-se da natureza de uma demonstração matemática em que há formas de convencimento aceites por uma comunidade apesar das argumentações normais poderem convencer uns e não convencer outros (Douady e Parzysz, 1998). Os argumentos usados pelos alunos podem permitir ao professor perceber o desenvolvimento conceptual dos alunos relativo ao conceito A ou B e poder identificar os obstáculos e dificuldades específicas e assim ajustar a sua actuação às necessidades detectadas.

Assim espera-se que os alunos tenham um papel mais activo e com maior iniciativa. De facto, aprender para o aluno, é entrar num jogo de reformulação-reinterpretação, é posicionar-se em relação aos conhecimentos, julgar a sua pertinência, confrontar as diferentes espécies de soluções, onde as interacções com os pares e com o professor são fundamentais e necessárias.

3.2.4. Competências

Em termos do Currículo Nacional do Ensino Básico formulam-se competências essenciais por temas e ciclos de ensino. No entanto este documento "convive" em simultâneo com o programa do Ensino Básico datado de 1991 em que o programa é definido por uma listagem exaustiva de conteúdos, de objectivos gerais (subdivididos em atitudes/valores, capacidades/aptidões e conhecimentos), onde aparecem em paralelo as Orientações Metodológicas e a avaliação. Como conciliar a aprendizagem de forma integrada e devidamente contextualizada numa lógica de competências se até aí tinha sido realizada centrada nos conteúdos salvaguardando os objectivos devidamente separados por categorias?

Numa primeira leitura parece impossível integrar (e não será?) um programa deste tipo, com esta filosofia subjacente, num documento marcado pelas orientações globais duma sociedade onde a complexidade é a marca mais profunda. O protagonismo dos profissionais da educação é fundamental percebendo a necessidade de educar *todos* os cidadãos, problematizando de forma crítica a relação "*entre a matemática, a educação matemática e a democracia no contexto social, cultural, económico e político em que tem lugar"* (Skovsmose e Valero, 2002: 27). A tarefa não é fácil mas é fundamental questionar: o que é que é importante que os nossos alunos aprendam? Como? E porquê?

Já no PISA 2003 (2004: 23-24) para que um indivíduo se empenhe na matematização bem sucedida de um conjunto de situações problemáticas a enfrentar, deve fazer uso de oito competências matemáticas [cognitivas] características (Niss, 1999):

1. Pensamento e raciocínio;
2. Argumentação
3. Comunicação
4. Modelação
5. Colocação e resolução de problemas
6. Representação
7. Uso da linguagem e de operações simbólicas, formais e técnicas
8. Uso de auxiliares e de instrumentos

No PISA optou-se por organizar as actividades cognitivas em três constelações de competências: a da *reprodução*, a da *conexão* e a da *reflexão*. Todas estas constelações são caracterizadas pelas oito competências matemáticas acima referidas mas a diferentes níveis de profundidade e complexidade.

Segundo Roldão (2003) competência é a capacidade efectiva para mobilizar, escolher, usar e articular informação aliada ao conhecimento (intelectual, prático ou verbal) para enfrentar uma situação, problema ou questão.

Segundo Niss[5](2002: 218) a "competência matemática" é a aptidão para compreender, julgar, fazer e usar a matemática numa variedade de contextos intra e extra matemáticos; Niss considera necessário, mas não suficiente, os conhecimentos factuais e as técnicas como pré-requisitos para a competência matemática.

No que respeita à área da Matemática e no questionário implementado em 2003, no âmbito do PISA, foram consideradas as áreas de avaliação relativas à resolução de problemas que foram definidas em termos de *conteúdo* ou *estrutura* de conhecimento que o aluno necessita adquirir em cada domínio de avaliação (quantidade; espaço e forma; mudança e relações; incerteza). Foram considerados os *processos* que tinham de ser executados e as «constelações de competências» - reprodução, conexão e reflexão; as s*ituações* e contextos em que os alunos encontravam problemas matemáticos e em que eram aplicados os conhecimentos relevantes (ME, 2004b: 6).

[5] Niss é um educador matemático dinamarquês que faz parte da equipa do PISA

Para a descrição de níveis de competência matemática o PISA organizou três classes de competências, de acordo com o tipo de exigências cognitivas necessárias para resolver problemas matemáticos diferentes. Esta organização em três níveis tem a ver com a dificuldade/impossibilidade de encontrar itens de testes que avaliassem individualmente as competências. A acrescentar quando se usa a matemática em situações/contextos concretos mobilizam-se vários tipos de competências. A partir da experiência realizada na Holanda (Lange[6], 1999), em diferentes contextos, usaram-se no PISA 2003 (ME, 2004a) as competências agrupadas em constelações de competências (reprodução, conexão e reflexão) de acordo com os níveis de competências mobilizadas (Lange, 2002; 1999). Assim, no PISA as constelações de competências estão representadas conforme a Tabela 3.1 (ME, 2004a: 34) o que permite resumir as diferenças entre elas.

Constelação *Reprodução*	Constelação *Conexão*	Constelação *Reflexão*
• Representações e definições estandardizadas • Cálculos de rotina • Procedimentos de rotina • Resolução de problemas de rotina	• Modelação • Tradução e interpretação da resolução de problemas estandardizados • Múltiplos métodos bem definidos	• Colocação e resolução de problemas complexos • Reflexão e perspicácia (*insight*) • Abordagem matemática original • Múltiplos métodos complexos • Generalização

Tabela 3.1: Representação das constelações de competências

3.2.5 Recursos

Os recursos usados e escolhidos de forma criteriosa e elucidada podem permitir uma experiência matemática mais rica e completa. Nos dias de hoje há um conjunto de materiais didáctico-pedagógicos específicos para a sala de aula e incluindo para a matemática: referimo-nos quer a materiais manipuláveis diversos (*polydron*, tangram, *evolute*, pentaminós, etc.) quer a materiais tecnológicos (as calculadoras - simples, gráficas e outras, os computadores através de software de geometria dinâmica ou através da folha de cálculo e o quadro interactivo). O uso de recursos diversos devidamente explorados nas actividades propostas nas tarefas permitirá o desenvolvimento de competências diversas e proporcionará que os alunos construam uma imagem da matemática diferente daquela que se resume a algo que se trabalha apenas com papel e lápis ou com giz e quadro.

[6] Lange é um educador matemático holandês e também pertence à equipa do PISA

Diversos estudos mostram que o uso de materiais manipuláveis produz maior rendimento nos alunos do que a sua não utilização, em todas as idades e em todos os anos da escola elementar (Suydam e Higgins, 1977; Sowell, 1989; Serrazina, 1990). Alsina (1999) afirma mesmo que o uso de materiais não é uma questão de idades mas de boas práticas docentes e portanto pode ter sentido em qualquer nível educativo: é fundamental que o uso que deles se faz, integrado em determinada tarefa matemática, permita um aprofundamento de visualização, de rigor científico, das linguagens de formalização, etc. A introdução de conceitos matemáticos, através da utilização de materiais manipuláveis, pode fazer com que a Matemática se torne viva e que as ideias abstractas tenham significado através de experiências matemáticas com objectos reais. Numa situação de aprendizagem com materiais, os vários sentidos do aluno são mobilizados, através do contacto e da movimentação, envolvendo-o fisicamente, sendo esta interacção favorável à aprendizagem. Aprender torna-se assim num processo activo de construção do conhecimento, com significado (Vale, 1999).

Segundo Almiro (2005) os materiais manipuláveis podem ser um factor de interesse e de motivação das actividades, mas também podem ser um elemento perturbador, não sendo por si só uma chave milagrosa para resolver todos os problemas de sala de aula. O uso de materiais manipuláveis/tecnológicos é um desafio para o professor, pois acrescenta muito mais actividade e barulho às aulas e requer mais espaço e organização. É essencial que os professores aprofundem o seu contacto com os vários materiais, pois só adquirindo um grande à vontade no seu manuseamento é que poderão escolhê-los e utilizá-los adequadamente com os seus alunos na sala de aula (Vale, 1999).

3.2.7 Avaliação

A avaliação do processo educativo e da evolução dos progressos dos alunos é uma tarefa muito importante do currículo. Esta deverá estar de acordo com o currículo implementado e seus pressupostos. Apesar do professor estar a avaliar constantemente o que se passa dentro da sala de aula tentando salvaguardar o bom ambiente de aprendizagem e perceber se os seus alunos estão atentos e a compreenderem e/ou trabalharem este precisa de esclarecer os alunos de como é que vai operacionalizar a avaliação: quais os instrumentos que vai utilizar para poder recolher informação, para poder formular um juízo e para os próprios alunos poderem fazer a sua auto-avaliação. De facto, ter-se-ão em consideração os pressupostos legais em vigor através do Decreto-Lei nº

1/2005. Neste enquadramento as tarefas de avaliação também serão de aprendizagem e proceder-se-á a uma recolha, o mais diversificada possível, relativamente à sua natureza, ao tipo de processos matemáticos considerados investindo nas competências transversais, essenciais e específicas do currículo.

Concretizar um currículo é também arranjar formas de o regular, isto é, considerar *um conjunto organizado de processos que visam (1) o acompanhamento regulador de qualquer aprendizagem pretendida e, que incorporam, por isso mesmo (2) a verificação da sua consecução*, isto é, de o avaliar (Roldão, 2003: 41).

Roldão (2003) não relega para segundo plano a avaliação sumativa mas salienta que não basta verificar que o aluno «sabe» um conteúdo, no sentido do conhecimento declarativo; importa indagar acerca do nível interpretativo e operacionalizador dos conhecimentos adquiridos.

A posição adoptada na reorganização curricular do ensino básico consiste em entender "o currículo e a avaliação como componentes integradas de um mesmo sistema e não como sistemas separados" e a considerar que "a avaliação envolve interpretação, reflexão e informação e decisão sobre os processos de ensino e aprendizagem, tendo como principal função ajudar a promover ou melhorar a formação dos alunos" (Abrantes, 2002: 10).

Numa lógica de ensino como a acção profissional inteligente e informada de fazer com que alguém aprenda, ou seja, se aproprie desse conhecimento e se torne competente nele, a avaliação é inerente ao processo de ensinar uma vez que esse processo não pode ocorrer sem haver regulação do que está ou não a ser construído, como está a ser usado o conhecimento, qual o crescimento da capacidade de pensar e agir no domínio trabalhado: ensinar avaliando e avaliar ensinando (Roldão, 2003). Abrantes apresenta os princípios orientadores da avaliação:

- A **consistência dos procedimentos de avaliação relativamente aos objectivos curriculares e às formas de trabalho efectivamente desenvolvidas com os alunos** – um princípio que implica a utilização de uma variedade de modos e instrumentos de avaliação, adequados à diversidade e natureza das aprendizagens, assim como uma atenção especial aos percursos e evolução dos alunos ao longo do ensino básico;

- O **carácter essencialmente formativo da avaliação**, associado às perspectivas de que o processo de avaliação deve evidenciar os aspectos em que as aprendizagens dos alunos precisam de ser melhoradas e apontar modos de superar as dificuldades, mas deve valorizar e tomar como base os seus interesses e aptidões;
- A **necessidade de promover a confiança social na informação** que a escola transmite, avaliando-se todos os aspectos da aprendizagem dos alunos considerados essenciais e envolvendo-se neste processo, de modos apropriados, os alunos e encarregados de educação (Abrantes, 2002: 10).

Fica claro que a avaliação é um processo fundamental no desenvolvimento do currículo por forma a ajustar o trabalho realizado ou a realizar e que não pode estar desligado das experiências de aprendizagem (diversificadas) que são proporcionadas. Por outro lado é enfatizado o seu carácter formativo na medida que a avaliação existe para ajudar na informação e na formação de atitudes para uma aprendizagem que se quer clarificadora, também, das dificuldades e ajustamentos; Cachapuz *et al.* (2002) referem-se de um modo ligeiramente diferente mas que na nossa opinião é análogo a este princípio referindo-se à *avaliação formadora* como uma nova orientação onde podem ser integrados os aspectos cognitivos e afectivos (afirmam mesmo *a razão com a emoção*), contribuindo, assim, segundo os mesmos autores, para uma visão mais completa das problemáticas inerentes ao conhecimento científico-tecnológico-social, assim como às metodologias e tarefas desenvolvidas ao longo do ensino e da aprendizagem.

Os resultados da investigação empírica, sintetizados por Paul Black e Dylan William, em 1998, são os seguintes:

1. Os alunos que frequentam salas de aula em que a avaliação é essencialmente de natureza formativa aprendem significativamente mais e melhor do que os alunos que frequentam aulas em que a avaliação é sobretudo sumativa.
2. Os alunos que mais beneficiam da utilização deliberada e sistemática da avaliação formativa são os alunos que têm mais dificuldades de aprendizagem.
3. Os alunos que frequentam aulas em que a avaliação é formativa obtêm melhores resultados em exames externos do que os alunos que frequentam aulas em que a avaliação é sumativa (Black e William, 1998).

Domingos Fernandes (2005: 55-64) problematizando as concepções existentes sobre avaliação formativa apresentou o conceito de avaliação formativa alternativa como uma forma de distinção daquilo a que chamamos, nas décadas de 70 a 80, de avaliação formativa. Domingos Fernandes de uma forma coerente, consistente e sistemática comparou e distinguiu a avaliação formativa alternativa e a avaliação sumativa. Reflectindo sobre o sistema de avaliação das aprendizagens considerou que há uma natureza progressiva e até inovadora que está patente nos dispositivos legais do sistema educativo português. No entanto quando se investigam as práticas de sala de aula constata-se uma diferença substancial entre o que se faz e o que se preconiza no sistema educativo. Ora apesar dos pressupostos legais no Sistema Educativo português estarem fundamentados em teorias do currículo, da aprendizagem e da avaliação que merecem um alargado consenso na comunidade educativa, Domingos Fernandes identifica problemas endémicos: a utilização quase exclusiva da avaliação para classificar os alunos, os níveis anormalmente elevados de retenção e os resultados modestos ou mesmo fracos em provas de avaliação externa (nacionais e internacionais) sobretudo quando as questões exigem a mobilização, a integração e a aplicação de conhecimentos. Considera que as políticas educativas deverão dar uma prioridade muito destacada à melhoria das aprendizagens nas salas de aulas e ao desenvolvimento da avaliação formativa.

3.3 A relação entre a matemática, professor e alunos

Douady e Parzysz (1998) começam por problematizar previamente se, numa sala de aula de matemática, a matemática é, de facto, o objecto central da interacção, isto é, apesar de institucionalmente se esperar que numa sala de aula de matemática o professor e os alunos se encontrem para que aprendam algum conhecimento será que todos os alunos da sala de aula também pretendem aumentar o seu repertório de conhecimentos e processos a matemática? Será que o professor também tem isso como foco principal do seu trabalho? Douady e Parzysz (1998) vão mais longe e questionam, mesmo, se será possível que os professores que o desejem consigam comunicar conhecimento matemático aos alunos. Neste contexto apresentam uma análise esquemática da situação de sala de aula tendo como objecto central o conhecimento matemático na relação entre professores-alunos.

Muitas vezes há a preocupação de se saber como se há-de introduzir um novo tema, qual o tipo de tarefas a trabalhar, quais as dificuldades que se vão encontrar (os alunos, a implementação do que foi planificado, etc.) mas Douady e Parzysz salientam que "ensinar", "aprender" e "conhecer" podem ter significados bastante diferentes influenciando as escolhas e as expectativas do professor apesar de todos concordarem que os alunos vêm à escola para aprenderem matemática, e que este conhecimento é importante senão mesmo essencial na relação entre professor e alunos. Nesta análise Douady e Parzysz apresentam uma categorização de quatro casos extremados na relação entre professor, alunos e a matemática, conforme se pode ver na tabela:

Interesse / curiosidade / paixão pela matemática	Professor (P): sim	Professor (P): não
Aluno (A): sim	**Paraíso**	**Conflito** com rumo para a ficção didáctica
Aluno (A): não	**Conflito** com vantagem para o Professor	**Ficção didáctica**

Tabela 3.2: Relação entre professores, alunos e a matemática segundo Douady e Parzysz

Douady e Parzysz ressalvam que na mesma sala de aula podem estar alunos que venham à escola para aumentarem o seu conhecimento enquanto que outros andam apenas a tentar passar de ano para ano para poderem ter um bom emprego enquanto que outros tentam socializar-se e aprenderem a ter bastantes meios. Não se importam se a matemática ou outro qualquer assunto é ensinado. Por outro lado, o professor, dependendo da sua história pessoal, do conhecimento matemático, das concepções acerca do que é a aprendizagem, da vontade de convencer e dos condicionamentos existentes, tentará operacionalizar as suas convicções ou apenas sobreviver. Para Douady e Parzysz (1998) os alunos e o professor poderão estar do mesmo lado e em lados opostos no que respeita à relação com a Matemática. Caracterizam os diferentes estados do seguinte modo (ver Tabela 3.2):

Situação paraíso: ocorre quando a turma é constituída por alunos e professor que gostam de matemática. Nesta situação Douady e Parzysz afirmam que a geometria na matemática é um tema conveniente para a dinâmica. Caracterizam o trabalho do professor a partir da escolha e organização de acordo com os estádios dos alunos, incluindo os *timings* do conhecimento tanto para desenvolver a curiosidade de modo que seja aceitável para os alunos e eficiente tendo em vista os objectivos de aprendizagem.

Ficção didáctica: ocorre quando nem o professor nem os alunos têm uma boa relação com o conhecimento matemático. Em relação ao professor para realizar a profissão como professor e em relação aos alunos para realizarem a sua tarefa de alunos, a turma experimenta um estado de ficção didáctica: o professor ensinará qualquer coisa e os alunos deverão aprender qualquer coisa.

Conflito: isto acontece quando a matemática é um objectivo para o professor mas não o é para os alunos e vice-versa (ver Tabela 3.2). Então o objectivo do professor será obter uma mudança na relação dos seus alunos com a matemática. Poderá ser um grande desafio para o professor, que se compromete num processo de mudança de relação dos seus alunos com a escola, de relações entre o professor e alunos e entre os alunos. Isto requer que os alunos sejam capazes de enfrentar uma actividade científica e sejam convencidos de que vale a pena fazê-la. É responsabilidade do professor convencer os seus alunos que a matemática é uma ciência viva, que a criação é realizada todos os dias e que eles próprios podem tomar parte nesse processo quer directamente quer trabalhando num dos domínios da economia, da tecnologia ou da vida social onde a matemática está implícita de uma forma essencial.

Conforme pudemos observar a relação entre a matemática, professor e alunos pode ser caracterizada por quatro situações bastante extremadas. Sabemos que a realidade só excepcionalmente se apresenta de forma radical. No entanto, para poder haver mediação de um professor é necessário que haja interacções didácticas. Nem sempre, numa sala de aula há condições para que estas sejam realizadas como se passa nas situações de ficção didáctica e de conflito que tendia para ficção didáctica. Como pode haver mediação se o professor não gosta, isto é, não tem interesse curiosidade ou paixão pela matemática? Do nosso ponto de vista só pode haver mediação nas situações "paraíso" e de "conflito" em que o professor tem interesse/curiosidade/paixão pela matemática.

Por outro lado, numa sala de aula, podemos encontrar alunos que socialmente não estão integrados na lógica escolar e que estão na sala de aula: a rejeição pelo que é realizado é o modo como reagem a tudo que é proposto pela escola não querendo ser integrados na dinâmica de sala de aula. O que é que um professor consegue fazer? Qual o tipo de estratégia a usar?

Cremos que o esquema apresentado por Douady e Parzysz não considera este tipo de situações que só muito dificilmente conseguem ser resolvidas com sucesso.

3.4 Papel do *critical friend* nas práticas de ensino

A descrição da dinâmica de sala de aula para Shank (2006) ajuda os professores a criar um espaço de aprendizagem colaborativo, ligando a realidade privada e individual de ensino a uma realidade conceptual pública reflectindo no seu ensino, e vendo novas direcções e co-construindo uma compreensão partilhada de boa pedagogia. Para alguns autores, as histórias e narrativas/descrições dos acontecimentos da sala de aula não são apenas usados para representar situações passadas num momento presente mas para negociar acontecimentos presentes e futuros. Para Shank (2006: 730) as imagens verbais e expressões emocionais, usadas na narrativa dos acontecimentos de sala de aula permitem que a prática de ensino do narrador seja exposta a público. Quem ouve pode remeter essas imagens de volta para o narrador de diferentes modos: questionando, apresentando contra-exemplos e extensões ao apresentado. Simultaneamente, quem ouve pode reflectir sobre a sua prática de ensino a partir do espelho/exemplo providenciado pelo narrador. O diálogo entre professores acerca da sua prática de ensino e das experiências de aprendizagem proporcionadas permite um movimento da realidade concreta, privada, pessoal para a realidade conceptual colectiva e pública. Este tipo de prática permite aos professores ver através da sua experiência pessoal e desenvolver uma compreensão partilhada do ensino.

Os diálogos realizados pela investigadora e a professora B, *critical friend*, aconteceram num espaço colaborativo onde as suas práticas pessoais eram reveladas, compreendidas, criticadas e desenvolvidas. Também para Cook e Brown (1999) o diálogo entre duas pessoas e, particularmente entre dois profissionais da educação, pode ser uma fonte de inovação das suas práticas a partir de partilha produtiva: para Cook e Brown (1999: 393-394) o diálogo permite não só a partilha do conhecimento como pode, também, proporcionar a geração de novo conhecimento e possíveis novas formas de usar o saber fazer. Assim o diálogo pode permitir e proporcionar um trabalho e compreensão epistémicos sobre as práticas de ensino de cada professor assim como a inovação das práticas de sala de aula. Cook e Brown (1999: 398) afirmam que para além dos conhecimentos individuais é importante criar situações que ajudem os grupos a desenvolver práticas (formas de saber) que usem o conhecimento de novas e inovadoras formas e mais produtivas. Também Costa e Kallick (1993) falam do *critical friend* como uma pessoa de confiança que coloca questões provocatórias, providencia a análise dos "dados" através de lentes diferentes e que critica o trabalho de uma pessoa como um amigo: contribuindo sempre para o sucesso do trabalho em causa.

É neste contexto e com estes pressupostos que o diálogo entre a *critical friend* e a professora investigadora acontece: num contexto de confiança e amizade, dentro de práticas situadas e devidamente contextualizadas do trabalho ordinário e comum permitindo aprofundar o conhecimento das respectivas práticas a partir do confronto estabelecido pelas perguntas de esclarecimento, pela partilha de entendimentos diferentes, pelas práticas diferentes depois do planeamento da prática ter sido negociado de forma consensual.

4. Desenvolvimento curricular em ensino da geometria

Ao falarmos de desenvolvimento curricular em geometria convém começar por explicitar que os objectivos do ensino da geometria estão contextualizados numa formação matemática para todos os alunos e com a finalidade a compreensão da natureza da Matemática. Tal como já foi referido anteriormente entendemos que esta compreensão se atinge através de uma experiência matemática intensa e variada e da reflexão sobre essa experiência. Para percebermos o contexto em que nos situamos em termos de tradição de ensino da geometria poderemos afirmar, baseados nos trabalhos de Veloso (1998, 1999), que o movimento da Matemática Moderna é um marco em termos de práticas e de integração ou não da Geometria no currículo de Matemática. Assim, antes do movimento da Matemática Moderna, o currículo dos "liceus tinha duas componentes principais: as construções geométricas e o estudo da geometria euclidiana – no estado exacto em que Euclides a deixara, no plano e no espaço" (Veloso, 1998).

Com o movimento da Matemática Moderna a nível internacional as consequências no ensino da geometria variaram conforme os países.

A diminuição dos conteúdos da geometria no ensino e no currículo da Matemática aconteceu ao longo das décadas de 70 e 80.

A geometria começou a ganhar, novamente, importância a nível internacional e também com a influência do matemático Hans Freudenthal e do casal van Hiele da Holanda e das Normas e suas Agendas dos EUA (Veloso, 1998). É de Freudenthal a afirmação seguinte que se encontra no seu *livro Mathematics as an Educational Task* publicado em 1973 no capítulo "*The case of geometry*" referida em Veloso (1998):

> "*Geometria é compreender o espaço em que a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar e conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor*"

Há também três obras que marcam a cena internacional:

- *Geometry's Future* (1991) organizado por John Malkevitch e publicado pelo COMAP (Consortium for Mathematics and Its Applications) – resulta de uma reunião de investigadores e professores universitários de Geometria convocada para avaliar as orientações do ensino da Geometria na época da sua elaboração e para propor recomendações relativas ao seu futuro;

- *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (1998) trata-se de um estudo do ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) e foi proposto por Miguel de Guzmán aquando seu presidente em 1992; - resultou de uma reunião realizada em Catânia (Itália) com 72 participantes de 33 países e que apresentaram uma preocupação acerca do futuro do ensino da geometria;
- *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (1998) - editado por Leher e Chasan e reflecte uma apreciação acerca dos papéis interactivos do conteúdo, professor, alunos e tecnologia na gestão curricular em sala de aula que promova a compreensão da geometria e espaço.

De facto pode afirmar-se que há um movimento de regresso ao ensino da geometria no panorama mundial da matemática e do seu ensino. Também em Portugal se constata um interesse crescente pela geometria. Em termos de publicações sobre a Geometria e o respectivo ensino pode ser destacado "Geometria – temas actuais" que pode ser considerado uma obra de referência no panorama português. Em termos de encontros temáticos sobre o ensino da geometria, em Portugal, podemos referir o encontro "Ensino de Geometria no virar do milénio" da iniciativa do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Desse encontro e das diferentes contribuições, Ponte e Veloso (1999: 4) identificaram pontos de convergência, a saber:

1) a experimentação e a dedução foram consideradas igualmente importantes, desempenhando um papel complementar; foi reconhecido pelos presentes nesse encontro que o desenvolvimento da intuição devia ser uma preocupação constante do professor do ensino básico ao superior e que a dedução com carácter local deveria começar a surgir desde relativamente cedo, embora os estudos de cunho estritamente axiomáticos devessem ficar para o fim do ensino secundário;
2) as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e com outras áreas exteriores à Matemática deveriam ser valorizadas e dando também importância às aplicações.

No entanto e relativamente aos conteúdos e tópicos que são essenciais no currículo geometria, ao papel da história na geometria escolar, ao tipo de currículo e como deve ser enfatizado, aos aspectos estruturais que devem ser trabalhados nesse currículo, ao tipo de formação em geometria a implementar nas diferentes formações de professores (inicial e contínua) e à finalidade do ensino da geometria não há uma posição unânime e consensual entre os diversos intervenientes responsáveis pela sua definição.

Este capítulo está organizado em 4 pontos, a saber: a geometria ao longo dos tempos (4.1), o que é a geometria (4.2), processos cognitivos na geometria (4.3) e, por último, geometria na sala de aula (4.4).

4.1 Geometria ao longo dos tempos

A geometria considerada como uma ferramenta para compreender, descrever e interagir com o espaço em que vivemos é vista por muitos como a parte da matemática mais intuitiva, concreta e relacionada com a realidade. Para Atiyah (1982), ilustre matemático do século XX, não há qualquer admiração no facto da geometria ter sido o primeiro ramo da matemática a surgir e a chegar à maturidade:

"Não foi acidente, penso eu, que a geometria, nas mãos dos gregos, fosse o primeiro ramo da matemática a chegar à maturidade. A razão fundamental é que a geometria é a menos abstracta da matemática: isto significa que tem aplicação directa para a vida do dia-a-dia e que pode ser entendida com menos esforço intelectual. Por contraste a álgebra é a essência da abstracção, envolvendo um dicionário de simbolismo que tem de ser trabalhado com grande esforço. Mesmo a aritmética, baseada no processo de contagem, depende do seu próprio dicionário tal como o sistema decimal, e demora bastante tempo a desenvolver" (Atiyah, 1982, 24). Atiyah reconhece, obviamente, que a geometria em níveis sofisticados envolve abstracção. Os gregos reconheceram que os objectos geométricos pontos e linhas não são objectos reais, que existem no mundo real, mas sim objectos "ideais", existentes num mundo "ideal", como aproximações a objectos reais. Os "Elementos de Euclides" aparecem como uma obra de referência na formalização da geometria e na sua apresentação como uma teoria axiomática, fundada em 5 axiomas. Euclides com esta obra apresenta uma sistematização do trabalho realizado até aí por diferentes civilizações (egípcia, mesopotâmica, etc.) e por diferentes figuras marcantes da antiguidade (Apolónio, Arquimedes e Ptolomeu, entre outros) na área da Geometria. A geometria que nasceu das necessidades práticas e utilitárias da medida de comprimentos, áreas e volumes transforma-se gradualmente com os gregos num processo abstracto e de racionalização "global" (Mammana e Villani, 1998). Nesta altura, o interesse é centrado, fundamentalmente, nos aspectos geométricos conceptuais. A importância dos "Elementos de Euclides" era tal que era considerada como um "*modelo e um protótipo de uma* *sistematização racional de todos os campos do conhecimento*" (Mammana e Villani, 1998, 2). A geometria pode ser vista como uma disciplina, que sofreu um processo extensivo de formalização, durante cerca de 2000 anos, em níveis crescentes de rigor, abstracção e generalização. Neste contexto a geometria aparece como uma disciplina fundamental na formação cultural e artística de pessoas (desde o medieval "Trivium/Quadrivium" até à renascença e posteriormente). As ideias originais na investigação geométrica, segundo Mammana e Villani (1998), são exteriores à geometria euclidiana: durante o século XV a partir de estudos de perspectiva no meio artístico (Piero della Francesca, Leon Battista Alberti); no século XVII a partir de um encontro entre a álgebra e a geometria (Descartes); no século XVIII a partir de um estudo sistemático dos métodos de representação de objectos tridimensionais através de desenhos, isto é a partir da geometria descritiva (Monge). De acordo com os mesmos autores, as geometrias desenvolvidas (projectiva, analítica e descritiva) não questionavam o espírito da geometria euclidiana pelo que não interferiram na autoridade do tratado de Euclides e foram consideradas acrescentos à geometria já existente. A obra, "Os elementos de Euclides", resistiu, assim, até ao século XIX. Com o aparecimento das geometrias não euclidianas (Gauss, Bolyai e Lobachevsky), construídas com base na "negação" do 5º axioma de Euclides, mostrando a independência do 5º axioma, permitiu imaginar alternativas à geometria Euclidiana, relativizando o papel central da geometria euclidiana dentro da Matemática e no conhecimento científico. Um grande efeito prático foi libertar a geometria do mundo físico. Estes factos contribuíram para estimular novas investigações nos fundamentos da geometria com Riemann, Pasch, Peano e Veronese tendo culminado com os trabalhos de Felix Klein "*Erlangen Program*" em 1872 (que tentou definir a geometria como o estudo das propriedades invariantes sob a acção de um dado grupo de transformações), e com a publicação de David Hilbert "*Grundlagen der geometrie*" em 1899 (onde tentou desenvolver um tratamento completo e consistente dos axiomas da geometria e sintetizar esses axiomas no contexto da análise dos números reais). Segundo Franco de Oliveira e Fortes (2001), no prefácio da 2ª Edição Portuguesa do livro, esta obra moldou "*definitivamente o método hipotético-dedutivo das teorias matemáticas modernas*" (Hilbert, 2001, viii). Segundo Mammana e Villani (1998), estes dois últimos trabalhos permitiram concluir o ciclo de investigações nos fundamentos da geometria tal como os "Elementos de Euclides" concluíram a fase da racionalização de geometria na antiguidade.

Nesta altura os “Elementos de Euclides” são alvo de várias críticas sendo famosa aquela que é apresentada por Bertrand Russell relativamente ao ensino de Euclides:

“*Tem sido costume quando Euclides é atacado pelo seu palavreado, pelo seu obscurantismo ou pelo seu formalismo, considerando o seu livro de texto, defendê-lo basicamente* [dizendo] *que a sua excelência lógica é transcendente, e permite aos jovens um treino inestimável aos poderes do raciocínio. Esta pretensão desvanece-se numa inspecção mais atenta. As suas definições nem sempre definem, os seus axiomas não são sempre indemonstráveis, as suas demonstrações requerem muitos axiomas dos quais ele é completamente inconsciente. Uma prova válida apresenta a sua força quando não necessita do desenho de nenhuma figura, mas muitas das provas iniciais de Euclides falham antes deste teste*”(Russell, 1902, 486). Bertrand Russell apresenta algumas falhas do trabalho de Euclides e conclui que poderia fazer mais críticas aos métodos de Euclides e à sua concepção de Geometria, no entanto pareceu-lhe suficiente as falácias que apresentou em passagens específicas dos “Elementos de Euclides” para mostrar que o valor da sua obra como uma obra prima da lógica foi grosseiramente sobreavaliado.

Nas décadas seguintes a investigação dos aspectos algébricos da disciplina ocupou um papel importante também devido ao desenvolvimento rigoroso dos fundamentos da teoria dos números reais por Dedekind, Cantor e Weierstrass. Mammana e Villani (1998) afirmam que nesta altura se deu uma reviravolta na dinâmica entre a álgebra e a geometria: até ao fim do século XIX as ‘certezas’ da álgebra obtinham-se por se apoiarem nas ‘certezas’ da geometria; depois do fim do século XIX a álgebra passou a providenciar ‘modelos’ seguros para a geometria. Assim, enfrentaram-se estruturas abstractas de grande dimensão, sem estarem directamente relacionadas com a experiência sensória – os autores referem as contribuições de Riemann e Minkowski para a geometria diferencial e a influência dessas realizações para a teoria da relatividade de Einstein. Isto é, daqui resultou que a geometria não está circunscrita ao estudo do espaço físico. Em particular não está restringida a 3 (ou 4 dimensões). No século XX, a geometria ganhou em generalização, distanciando-se da intuição geométrica.

No fim do século XX o interesse nos aspectos visuais da geometria torna a estar actual mas a partir de áreas externas à própria matemática com especial incidência na exploração da capacidade gráfica dos computadores, no processamento e reconstrução da imagem, no reconhecimento de estruturas e na robótica. Para Malkevitch (1998) não há dúvidas, em termos factuais históricos, que a geometria tem sido útil na resolução de uma variedade de problemas da vida do dia-a-dia mas o que ele considera surpreendente é que, actualmente, o pensamento geométrico tem sido fundamental e tem sido o suporte do aparecimento de novas tecnologias; destaca dentro delas a robótica, as técnicas de imagem médica, as telecomunicações, o processamento e manipulação da imagem (nos meios artísticos de marketing, de publicidade, de cinema, de fotografia, etc.). Malkevitch destaca ainda diversas operações de investigação que recorrem ao pensamento e a métodos geométricos. Mammana e Villani referem que os departamentos implicados nestas investigações são os das ciências de computação, das engenharias, da química e da medicina. Deste modo reconhecem que os aspectos geométricos que têm sido utilizados "oscilam entre *os aspectos visuais, computacionais, conceptuais, algébricos, utilitários e aplicacionais*" Mammana e Villani (1998, 3).

Apresentou-se de uma forma breve e sintética o papel que a geometria tem tido ao longo dos tempos e a importância fundamental da obra "Elementos de Euclides" como legado matemático durante 2000 anos. Não podemos, contudo, alhear-nos a todos os desenvolvimentos existentes na sociedade do século XX. Não há dúvidas que as descobertas de novas tecnologias, a evolução científica nos diferentes campos, alteraram profundamente a Humanidade: as distâncias encurtaram-se e vivemos numa aldeia global.

De seguida reflectiremos acerca do que é a geometria e de qual a sua natureza para tentarmos esclarecer do que é que falamos quando falamos em geometria.

4.2 O que é a Geometria

Uma pergunta natural de quem se interessa pela geometria é, de facto, o que é a geometria. G. H. Hardy, em 1925, apresentou uma conferência onde reflectiu acerca da pergunta feita esclarecendo que não era geómetra. Começou por apresentar dois pressupostos esclarecedores:

- *não há uma geometria mas um número infinito de geometrias e a resposta à pergunta realizada difere conforme a geometria que se esteja a considerar;*
- *a geometria elementar das escolas e das universidades não é desta ou daquela geometria mas uma colecção desordenada e heterogénea de fragmentos de, pelo menos, uma dúzia de geometrias* (Hardy, 1925, 14)

Acrescentava que esses rudimentos de geometria deveriam ser trivialidades familiares a todos os professores mas que às vezes isso não acontecia. Chamava a atenção que aquilo que se ensinava, por vezes tinha pouco a ver com geometria mas sim com física, ou muitas vezes com filosofia. Nesta altura ainda os matemáticos discutiam acerca dos fundamentos da geometria provocados pelo aparecimento das geometrias não euclidianas. Hardy sublinhava que achava inacreditável que pudesse haver matemáticos que continuassem a confundir a geometria com a "a ciência do espaço", uma ideia do senso comum. Afirmou assim que

> "a geometria, tal como outra teoria matemática, é um mapa ou um esquema. É uma ilustração, e uma ilustração, naturalmente de *alguma coisa*[…]. Assim, alguns dirão que é uma ilustração de alguma coisa nas nossas mentes, ou desenvolvida a partir delas ou construída por elas, enquanto que outros, tal como eu, estarão mais dispostos a dizer que é uma ilustração de alguma realidade independente exterior a eles próprios; e pessoalmente penso que a visão porque cada um optar não tem muita importância" (Hardy, 1925, 16).

Hardy assume que as geometrias são, então, modelos de alguma coisa que possa ser descrita como realidade matemática. Problematiza, também, qual a natureza desses modelos que considera não ser fácil de definir. Conclui que a geometria é uma colecção de sistemas lógicos; que o número de sistemas é infinito (podendo qualquer um inventar tantos sistemas quantos quiser!) e que há duas espécies de sistemas: as geometrias analíticas e as geometrias puras. Uma geometria analítica, que pode ser de uma, de duas, de três, de quatro, de *n* dimensões, real ou complexa, projectiva ou métrica, euclidiana ou não euclidiana é um ramo da análise com as propriedades de certos conjuntos ou classes de conjuntos de números. Hardy afirma que

> "O trabalho de um geómetra analítico é, de forma sintética, investigar as propriedades de um *sistema particular de coisas*. O ponto de partida de um geómetra puro é completamente diferente. Ele não está, a não ser por propósitos casuais e subsidiários, nada preocupado com coisas particulares. A sua função é sempre considerar *todas as coisas que possuem certas propriedades*, e por outro lado é estritamente indiferente ao que elas são. Os seus 'pontos' e 'linhas' não são nem objectos espaciais, nem conjuntos de números, nem este ou aquele sistema de entidades, mas *qualquer* sistema de entidades que está sujeito a um conjunto de relações lógicas. O sistema particular de relações que ele estuda é aquele que é expresso pelos *axiomas* da sua geometria. São apenas os axiomas que realmente

interessam; são eles que descriminam os sistemas e as definições jogam conjuntamente, com eles, uma parte subsidiária" (Hardy, 1925, 20).

Hardy clarifica ainda que:

- em diferentes sistemas geométricos, proposições que são textualmente idênticas, ocupam posições completamente diferentes: o que é um axioma num dado sistema pode ser uma definição num outro, um teorema num terceiro e um falso teorema num quarto;
- uma geometria analítica incorpora o vocabulário geométrico usual para sistemas de números mais ou menos complexos e investiga as suas propriedades através das ferramentas ordinárias da álgebra e da análise;
- uma geometria pura, por outro lado, considera todos os campos possíveis com certas relações lógicas e explora as suas relações sem referência à natureza dos objectos entre os quais é mantida.

Michael Atiyah, em 1982, com o propósito de responder à mesma questão que dá o título a este item, começa por apresentar exemplos de 'espaços' para ilustrar que estes, alguns deles de grande dimensão, aparecem quase naturalmente de situações realísticas, tais como:

1. Gráficos – em todos os níveis, os gráficos são familiares e bastante usados; o plano no qual desenhamos o gráfico é um plano abstracto, mas a vantagem prática desta representação pictorial é obviamente enorme. A vantagem aparece ligada à capacidade do cérebro ver estruturas bidimensionais de uma só vez.
2. O plano complexo – representação do conjunto dos números complexos;
3. Mecânica Newtoniana - o movimento de uma partícula, num dado campo de forças, pode ser determinado se soubermos a posição e a velocidade num dado instante. Assim, o movimento pode ser representado por uma curva (x(t), v(t)) num espaço de 6-dimensões onde x(t) e v(t) são representados por vectores de três componentes.

Assim sintetiza:

"Se a geometria não é o estudo do espaço físico mas o estudo de qualquer espécie de espaço abstracto isso não fará coincidir a geometria com toda a matemática? Se eu posso sempre pensar em *n* variáveis reais como representando um ponto num espaço n-dimensional o que é que distingue a geometria da álgebra e da análise?

[…] De uma forma mais abrangente tento sugerir que a geometria é a parte da matemática na qual o pensamento visual é o dominante enquanto que a álgebra é a parte onde o pensamento sequencial é o dominante. Esta dicotomia é talvez, melhor comunicada pelas palavras '*insight*' versus 'rigor' e ambas jogam um papel fundamental nos problemas matemáticos reais." (Atiyah, 1982, 28-29)

Enquanto Hardy se foca na natureza da geometria por si mesma como uma colecção de sistemas lógicos, subdividida em duas espécies, as geometrias analíticas e as geometrias puras, Atiyah tenta apresentar exemplos de diversas geometrias correspondentes a espaços abstractos que modelam situações realistas para poder afirmar que a geometria é uma parte da matemática em que o pensamento visual é preponderante e apresenta-o em contraposição ao pensamento lógico e sequencial mais próprio da álgebra.

No documento de discussão "Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century", que esteve na base do estudo do ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), e que veio a lume em 1998 com o mesmo nome, já se afirmava que era difícil listar todos os aspectos que a geometria englobava (Mammana e Villani). No entanto apresentam alguns que consideram particularmente pertinentes e relevantes tendo em consideração as suas implicações didácticas:

- Geometria como *uma ciência do espaço*;
- Geometria como *um método para representações visuais de conceitos e processos* de outras áreas da matemática ou de outras ciências; por exemplo, gráficos, grafos, diagramas de várias espécies, histogramas;
- Geometria como *um ponto de encontro* entre a matemática como uma teoria e matemática como uma fonte de modelos;
- Geometria como *um modo de pensamento e de compreensão* e num nível mais elevado como *uma teoria formal*;
- Geometria como *um exemplo paradigmático para o ensino do raciocínio dedutivo*;
- Geometria como *uma ferramenta nas aplicações tanto tradicionais como inovadoras*.

A Geometria, rompeu assim, com os limites que tradicionalmente lhe eram atribuídos como um protótipo de uma teoria axiomática e, nos dizeres de Dieudonné, "*revelou o seu* *grande poder e extraordinária versatilidade e adaptabilidade transformando-se numa das mais úteis e universais ferramentas em todas as partes da matemática*" (J. Dieudonné: The universal domination of geometry, ZDM 13 (1), p. 5-7 (1981) citado no documento de discussão do estudo do ICMI acima referido). No que respeita à geometria passaremos a reflectir acerca de quais são os processos cognitivos fundamentais.

4.3 Processos cognitivos na geometria

A geometria, segundo Duval (1998), envolve três espécies de processos cognitivos que cumprem funções epistemológicas específicas:

- Os processos **de visualização** tendo em consideração a *representação espacial* para a ilustração e demonstração, para a exploração heurística de uma situação complexa, para uma vista de olhos sinóptica, ou para uma verificação subjectiva;
- Processos **de construção** a partir de ferramentas: construção e configuração podem funcionar como um *modelo* em que as acções representativas e os resultados observados estão relacionados com os objectos matemáticos que estão representados;
- **Raciocínio** em relação aos *processos discursivos* para alargamento dos processos de conhecimento, para demonstração e para explanação.

Estes processos diferentes, segundo Duval (1998), podem ser realizados separadamente. Assim a visualização não depende da construção: isto é, podemos aceder a figuras sem precisarmos de saber a forma como foram construídas. E mesmo se a construção precede a visualização, os processos de construção dependem apenas das conexões entre as propriedades matemáticas e os constrangimentos técnicos das ferramentas. Por último, se a visualização é uma ajuda intuitiva que é necessária para encontrar uma demonstração, o raciocínio depende exclusivamente do *corpus* das proposições (definições, axiomas, teoremas) que estão disponíveis. E nalguns casos a visualização pode iludir ou ser impossível.

Para Duval estas três espécies de processos cognitivos estão intimamente ligados e a sua sinergia é cognitivamente necessária para a proficiência na geometria.

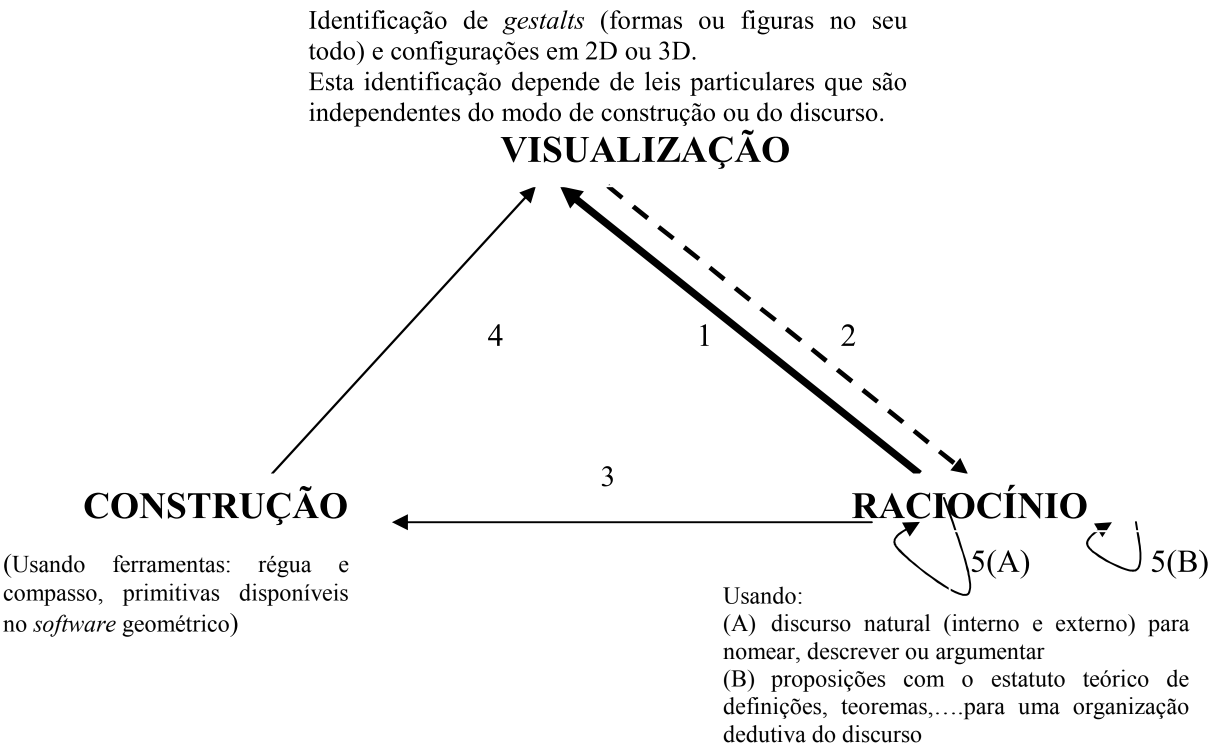


Figura 4.1: Interacções cognitivas fundamentais na actividade geométrica segundo Duval

Na Figura 4.1 cada seta representa o modo como uma espécie de processo cognitivo pode suportar outra espécie de processo cognitivo em qualquer tarefa. A seta 2 está tracejada porque a visualização nem sempre ajuda o raciocínio. A seta 5(B) dá ênfase a que o raciocínio B se pode desenvolver de forma independente.

A investigação realizada por Duval permitiu-lhe apresentar a seguinte estrutura de análise dos processos cognitivos:

1. *As três espécies de processos devem desenvolver-se separadamente.*
2. *Trabalhar de forma diferenciada entre os diferentes processos de visualização e entre os diferentes processos de raciocínio é necessário no currículo, porque há diferentes maneiras de ver a figura; da mesma maneira há várias espécies de raciocínio.*
3. *A coordenação destes três espécies de processos podem realmente ocorrer depois do trabalho de diferenciação* (Duval, 1998, 39).

4.3.1 Visão e Raciocínio como processos fundamentais na geometria

Poder-se-á perguntar se existirá uma separação entre as duas funções que a nossa mente tem de desempenhar – recolha da informação e processamento da informação. Veloso (1998, 126) coloca o problema do seguinte modo: *"Quando nos referimos à percepção visual, o que estamos a incluir neste conceito? Apenas a recepção passiva de imagens na retina para posteriormente serem trabalhadas a nível do pensamento? Ou uma actividade que envolve já pensamento, raciocínio?"* A partir do que é tradição fazer, de separar essas duas funções, Veloso, fundamentado em diversos autores defende a posição que os sentidos em geral, e em particular a visão, não devem ser encarados como recepção passiva da informação vinda do exterior mas sim esclarecidos pelo raciocínio. Recorrendo ao contributo de Rudolph Arnheim, no seu livro Visual Thinking em que este defende a posição de que é impossível separar a percepção visual do pensamento, do raciocínio,

> [...] As operações cognitivas a que chamamos pensamento não são o privilégio de processos mentais acima e para lá da percepção, mas os principais ingredientes da própria percepção. Estou a referir-me aqui a operações como explorar activamente, seleccionar, captar o essencial, simplificar, abstrair, analisar e sintetizar, completar, corrigir, comparar, resolver problemas, e também combinar, separar, colocar em contexto. Estas operações não são prerrogativa de uma função mental particular; são o modo como as mentes tanto do homem como do animal lidam com a matéria cognitiva a qualquer nível. Não existe uma diferença básica a este respeito entre o que acontece quando uma pessoa olha o mundo directamente ou quando se senta com os olhos fechados e "pensa" (Arnheim, 13)

Veloso defende uma posição em que a visualização e o raciocínio são processos intimamente interligados. Duval (1998) apresenta uma análise metacognitiva dos processos de raciocínio geométrico (demonstração, extensão do conhecimento e explanação) e as interacções com outros processos cognitivos do pensamento na geometria dando especial atenção à visualização. De seguida iremos aprofundar alguns aspectos da análise apresentada por Duval centrada num primeiro ponto na visão, num segundo ponto no raciocínio e, por último, na relação estrita entre os dois: visualização e raciocínio.

4.3.1.1 Visão

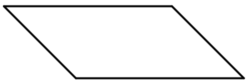
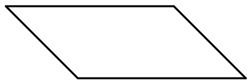
Ao olhar para uma figura deparamos com uma ou muitas *gestalts* 1D/2D ou 2D/2D (linha recta ou curva, uma linha fechada de um triângulo, ou quadrilátero, etc.) ou *gestalts* 3D/2D (cubo, bola, etc.). A identificação visual desses *gestalts* depende das leis da organização perceptiva, e todos esses *gestalts* podem ser usados para representar objectos reais ou objectos matemáticos. Mas em relação a representar um objecto matemático, segundo Duval (1998), a figura deve preencher dois requisitos específicos:

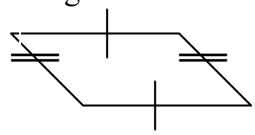
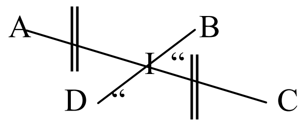
- ser uma configuração, isto é, ser uma junção ou fusão de vários componentes de *gestalts* tendo relações entre eles que caracterizam a configuração (condição visual);
- estar ancorado numa afirmação que fixa algumas propriedades representadas pela *gestalt* (hipóteses). Esta ancoragem discursiva dá a entrada matemática na configuração (condição de prova).

Assim, Duval (1998, 40) apresenta uma primeira distinção entre duas apreensões de uma figura: a apreensão visual e a apreensão discursiva e esquematiza essa diferença na Figura 4.2.

Pode ver-se a diferença significativa entre I, por um lado, e IIa – IIb por outro lado, que são geralmente confundidos. Em I o que é visto é apenas um *gestalt* que pode mostrar qualquer objecto: telhado, rectângulo de uma dada perspectiva…. Em II o mesmo *gestalt* pode ser visto como uma configuração de vários *gestalts* elementares, cada um representando por sua vez um segmento ou um ponto porque o *gestalt* percepcionado é afirmado ser um paralelogramo. Contudo a visualização em II é completamente diferente da I. A visualização de II requer um movimento interno entre a configuração da *gestalt* 2D e a dos elementos da *gestalt* 1D/2D que emergem no todo. Estes movimentos internos implicam uma **mudança dimensional** na organização perceptiva do modo de ver. A mudança dimensional interna, segundo Duval, não deve ser confundida com a **mudança de ancoragem** implicada nas duas passagens IIa e IIb, que não são equivalentes.

A mudança dimensional interna e a mudança de ancoragem são as características do modo matemático de olhar para um *gestalt* ou para uma configuração.

<table>
<tr><td>APREENSÃO PERCEPTIVA</td><td colspan="2">APREENSÃO DISCURSIVA de uma figura:
associação de gestalts e afirmações que determinam o objecto representado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">I. Visual</td><td colspan="2">(mudança de ancoragem)</td></tr>
<tr><td>II a. Visual → Discursiva</td><td>II b. Discursiva → Visual</td></tr>
<tr><td>
Identificação de uma gestalt 2D/2D. Pode ser visto como um telhado, a parte de cima de uma mesa, como um quadrado num outro plano, como um paralelogramo, etc.
Gestalts são vistos mais facilmente como representações geométricas quando são construídas com ferramentas (régua e compasso ou por software geométrico).</td><td>
“ABCD é um paralelogramo”

No contexto de uma proposição geométrica, este gestalt 2D/2D torna-se numa configuração predominante 2D/2D de muitos gestalts elementares 1D/2D (aqui linhas como lados de…). A representação geométrica é dada através das relações entre os gestalts elementares. Esta é a razão porque é que os gestalts 2D são mais facilmente vistos como configurações em relação à sua construção. A apreensão discursiva geométrica envolve uma mudança dimensional na apreensão perceptiva do gestalt 2D/2D.</td><td>“Seja ABCD um paralelogramo…”



Muitas configurações possíveis para o objecto “paralelogramo”: Relações entre segmentos (as propriedades do objecto representado) são realçadas pelos traços.</td></tr>
</table>

Figura 4.2: Diferentes entradas numa figura segundo Duval

Duval apresenta para além destes dois tipos de apreensões uma terceira: a apreensão operativa ou mudança figurativa. Duval para falar da apreensão operativa recorre a uma das formas de provar o Teorema de Pitágoras em que há uma verdadeira mudança figurativa (Figura 4.3)

O triângulo rectângulo deve ser incluído, em primeiro lugar, numa configuração mais abrangente, num quadrado exterior de lado $(a+b)$ com um quadrado interno de lado igual ao terceiro lado, hipotenusa, do triângulo rectângulo. Trata-se de uma mudança figurativa real. Segundo Duval (1998), o ponto mais interessante e importante é que a apreensão operativa pode ser mais ou menos visível e a sua visibilidade depende de factores inibidores ou facilitadores. E é esta mudança figurativa, ou apreensão operativa de uma figura, que dá à visão o seu poder heurístico na resolução de problemas.

Prova de que num triângulo rectângulo $a^2 + b^2 = c^2$

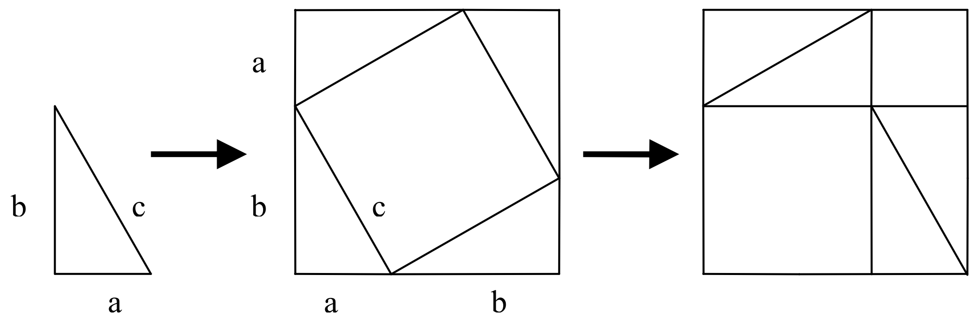


Figura inicial I. Configuração incluída II. Reconfiguração

Figura 4.3: Exemplo em que há uma mudança figurativa ou uma apreensão operativa

Assim, e segundo Duval, a visualização na geometria implica necessariamente pelo menos uma de três mudanças tal como foi apresentado atrás: **mudança dimensional, mudança figurativa e mudança de ancoragem**.

A mudança dimensional é a mais óbvia. Pelo menos na geometria do espaço onde se tem de distinguir as diferentes possibilidades de secção de um sólido, por exemplo, em ordem a seleccionar as mais relevantes. Na geometria do plano, tal como na geometria do espaço, a **mudança dimensional** é um processo cognitivo básico no modo como se olha para uma representação figurativa. A mudança dimensional é como movimento interno escondido (para cima e para baixo) no número de dimensões da apreensão visual de uma configuração.

A mudança figurativa, ou apreensão operativa, é a mais complexa e pode ser a menos consciente. Deve ser distinguida da apreensão perceptiva com a qual está ligada e da apreensão discursiva (que está ancorada nas hipóteses e no conhecimento das definições, teoremas, …) das quais está completamente separada. Compreende processos figurativos específicos. A mudança figurativa é como que uma acção que transforma a organização visual de uma configuração.

A mudança de ancoragem na apreensão discursiva é a mais familiar. Nós vemos e falamos (alto ou mentalmente) acerca do que estamos a observar. Assim, a distinção visual estimula as palavras, pelo menos implicitamente, e as palavras mentalmente proferidas podem centrar o foco da atenção para alguns aspectos menos notados na figura. Esta mudança de ancoragem passa muitas vezes sem ser referida.

E há relações entre o discurso interno e o raciocínio. Olhar para uma figura pode ser suficiente para compreender uma situação geométrica ou para estar convencido *apenas quando todas essas mudanças possam ser realizadas e emergirem*.

Duval coloca, então, uma questão:

"Mas esses modos de olhar são formas naturais e comuns de olhar para uma representação figurativa qualquer, independentemente se são material ou mentalmente produzidas?" (Duval, 1998, 45).

4.3.1.2 Raciocínio

A palavra "raciocínio" é usada num largo espectro de significados. Qualquer mudança, tentativa e erro, qualquer procedimento para resolver uma dificuldade é muitas vezes considerado como uma forma de raciocínio. Mais especificamente qualquer processo que nos capacite para gerar nova informação a partir de informações dadas é considerado "raciocínio". Deste modo, indução, abdução[7], dedução são várias espécies de raciocínio. De um ponto de vista cognitivo e segundo Duval (1998, 45) há diferentes espécies de processos que dependem da *forma* na qual a informação pode ser *organizada*.

Em geometria a informação dada, ou a informação disponível, é dada sob a forma de organização visual de *gestalts* de *n*D/2D e sob algumas redes semânticas a partir das quais não somente *gestalts* como objectos podem ser designados, como também as suas relações podem ser geradas. E essa informação dada deve ser processada num nível simbólico e representacional, mesmo se alguns modelos possam ser fisicamente construídos. Consequentemente a nossa questão reaparece: quais são os processos cognitivos em geometria envolvidos na resolução de problemas e nas demonstrações? Devemos distinguir, segundo Duval (1998), três processos cognitivos:

1. **processo puramente configurativo**, descrito acima como apreensão operativa;

[7] A criação quer das premissas (fundamentadoras da dedução) quer das teorias (fundamentadoras da indução) é exterior aos dois tipos de raciocínio antes referidos e reside na abdução. A abdução, que prova que algo pode ser, é uma inferência hipotética, é o verdadeiro método para a criação de novas hipóteses explicativas. A abdução é a única operação lógica que apresenta uma ideia nova. A dedução prova que algo deve ser; a indução mostra que alguma coisa é realmente operativa; a abdução simplesmente sugere que alguma coisa pode ser.

2. **processo discursivo natural** que é espontaneamente desenvolvido no discurso ordinário através da descrição, explanação e argumentação;
3. **processo discursivo teórico** que é desenvolvido através da dedução. A experiência da necessidade lógica está intimamente relacionada com este processo teórico. Isto pode ser desenvolvido num registo puramente simbólico ou num registo de linguagem natural. Mas estes dois registos não têm a mesma dificuldade ou o mesmo significado para os alunos.

O facto de que a apreensão operativa é completamente independente de qualquer processo discursivo já foi salientado. Esta é a razão porque a visualização é um processo irredutível para a investigação em geometria. Mas a visualização pode estar imersa num processo discursivo natural (Figura 4.1, na flecha 5 (A)): o que é normalmente designado por "raciocínio figurativo" é mais uma espécie de uma descrição espontânea de um processo puramente configurativo. Pelo contrário um processo puramente configurativo não pode ser imerso num discurso teórico mesmo se isso dá as ideias chaves para a demonstração. E, o que é mais importante para Duval (1998), é que há um hiato entre o processo discursivo natural e o processo discursivo teórico. Um dos problemas fundamentais do ensino da geometria é a inaptidão para fazer com que os alunos ultrapassem esse hiato. E algumas vezes os professores não têm esclarecimento suficiente da diferença significativa entre o processo discursivo natural e o processo discursivo teórico.

4.3.1.3 Visualização e raciocínio

Em geometria, a visualização envolve conjuntamente apreensão perceptiva, discursiva e operativa de uma figura como uma representação do espaço. A visualização joga um papel heurístico básico e, através da apreensão operativa, pode dar alguma coisa tal como convencer da evidência. Quais são as suas relações com as diferentes espécies de raciocínio? Duval responde à pergunta a partir dos comportamentos típicos abaixo mencionados (Figura 4.4).

COMPORTAMENTO NAÏVE

apreensão perceptiva de uma configuração *gestalt*

1 *mudança dimensional*
mudança de ancoragem?
apreensão discursiva entre outras possíveis

0 apreensão operativa de acordo com a **operação mais visível**, pertinente ou não para a apreensão discursiva

2 um processo discursivo natural imerso no processo configurativo realizado

COMPORTAMENTO MATEMÁTICO

apreensão perceptiva de uma configuração *gestalt*

1 *mudança dimensional*
mudança de ancoragem?
apreensão discursiva entre outras possíveis

0 apreensão operativa de acordo com a operação pertinente **entre factores facilitando ou inibindo a sua visibilidade**

2’ um processo discursivo teórico

3

Figura 4.4: Dois comportamentos típicos segundo Duval

Partindo da mesma situação geométrica (à esquerda), dois comportamentos completamente diferentes são possíveis. Um reage ao que é espontaneamente visível (0) e o raciocínio trabalha como um descritor dos passos da mudança configurativa que leva à solução (2). Um outro, o raciocínio começa apenas a partir da apreensão discursiva e é independente da visualização (3). A mudança puramente configurativa não segue os passos e a organização do raciocínio dedutivo para a demonstração, mas mostra alguns pontos chave, ou a ideia que permite seleccionar os teoremas fundamentais a usar (identificado pela seta 2’). Duval aponta para duas coisas que devem ser salientadas no tópico que estamos a discutir:

Para algumas situações geométricas o comportamento naïve é eficiente, mas sob algumas condições limitadas. O hiato entre a apreensão perceptiva e a discursiva, devidas às mudanças de dimensão e de ancoragem deve ser pequena (seta 1, na Figura 4.4). E os factores facilitadores da visibilidade da operação pertinente devem ser mais fortes do que os inibidores. Há um duplo hiato entre o comportamento naïve e o comportamento matemático. Um é acerca da visualização e outro é acerca do raciocínio.

Assim algumas competências específicas podem ser desenvolvidas pela forma comum de olhar para as figuras e a partir do raciocínio discursivo natural. Seria uma ilusão pedagógica apresentar o comportamento matemático através da aparência de comportamento naïve (ou na sua continuidade) por causa da visualização. O problema fundamental do ensino e aprendizagem da geometria é como ajudar os alunos a ultrapassar esse duplo hiato.

4.4 Geometria na sala de aula

A abordagem educacional à geometria, na Holanda, é feita, de forma contextualizada, pela teoria da Educação Matemática Realista (Realistic Mathematics Education – RME) e consistente com a perspectiva da matemática como uma actividade socialmente constituída. Assentando nos conhecimentos informais dos alunos acerca de aspectos geométricos de situações do dia-a-dia, as principais características da educação em geometria são a reinvenção através da matematização progressiva, a análise didáctica fenomenológica e o uso de modelos emergentes. Este tipo de abordagem permite que os alunos construam o seu próprio conhecimento matemático, promove uma atitude reflexiva perante o mundo e enquadra-se na filosofia que considera a matemática como uma actividade humana. Assim o ensino da geometria e o raciocínio espacial partem dos conhecimentos informais dos alunos e do mundo envolvente sob uma perspectiva geométrica constituindo um ponto de partida para o ensino "realista" da geometria. Situações problemáticas da vida real como exemplos de diferentes paradigmas de resolução de problemas, que podem servir como base de uma matematização progressiva, são construídas através da análise fenomenológica de conceitos matemáticos. Os alunos reinventam, guiados através de tarefas dadas, modelos matemáticos que eventualmente podem servir como referencial de base para a matemática formal. Através deste processo, o conhecimento informal dos alunos é matematicamente explicitado e elaborado tendo como objectivo final o conhecimento formal matemático. Gravemeijer (1998: 64) argumenta que a abordagem holandesa do ensino da geometria não só suporta a perspectiva da matemática como actividade humana mas, muito mais importante, leva os alunos a construir o seu próprio conhecimento e reforça a competência de reflexão dos alunos. Também Bussi e Boero (1998) preconizam a referência a contextos reais no ensino e aprendizagem da geometria (assim como na matemática) fundamentando em razões pedagógicas, sociais e filosóficas:

- motivação dos alunos para aprender geometria;
- necessidade de estabelecer ligações entre a aprendizagem escolar e a aprendizagem do dia-a-dia;
- a conceptualização da geometria como a "linguagem para descrever e interpretar a realidade" ou como a "estrutura que organiza a realidade".

A questão da evolução dos contextos internos dos alunos é considerada através das actividades organizadas e orientadas pelos professores dentro de "campos de experiência"[8] apropriados. Nalguns campos de experiência do mundo real, o aluno pode adquirir ferramentas geométricas e estratégias de raciocínio que poderão ser usadas para pensar e agir dentro do mesmo ou de outro campo de experiência, incluindo (através da necessária mediação do professor) os campos de experiência da geometria. O ensino e a aprendizagem da geometria integrados em campos de experiência leva à recontextualização do conhecimento geométrico como uma rede de ferramentas de acordo com as raízes culturais e motivações cognitivas; contudo o conhecimento geométrico recontextualizado é passível de constituir uma rede de objectos na relação gradual com campos de experiência geométricos, ou para serem aplicados na criação de novos artefactos culturais (Bussi e Boero (1998: 60).

Veloso apresenta e propõe uma nova abordagem do ensino da geometria. Tomando como premissa que os dois pilares em que assenta a aprendizagem da matemática são a experiência matemática e a reflexão sobre essa experiência e, aceitando, de acordo com esta premissa, que devem ser valorizadas as actividades de exploração e de investigação na sala de aula, apresenta as seguintes orientações gerais para uma possível abordagem da geometria:

1. A intuição e a dedução deverão estar presentes ao longo de toda a escolaridade. Não se deve considerar que o papel da intuição esteja reservado "para os primeiros anos" e o da dedução para os últimos... Comportando a experiência matemática uma componente experimental e tendo, além disso, a ciência matemática o raciocínio dedutivo como característica fundamental, estas duas componentes deverão fazer parte da actividade dos alunos em todos os níveis de ensino. A componente experimental deve apoiar-se na utilização de *software* e recorrer intensamente a outros materiais, como os manipuláveis, e isto não apenas nos tais

[8] A noção de "campos de experiência" é relativa à relação complexa que é desenvolvida na escola entre o contexto interno do aluno (isto é, experiência, modos de pensamento e de acção relacionados com um dado campo de experiência humana), o contexto interno do professor e o contexto externo (isto é, sinais, objectos, limitações objectivas de um dado campo). A noção de "campo de experiência" tanto pode ser considerada em contextos sociais extra-escola (por exemplo a actividade social de medição), como em contextos físicos como em contextos da matemática escolar (por exemplo, na geometria) ou mesmo em contextos onde todos os aspectos atrás referidos estão inter-relacionados (por exemplo, a cartografia) (Bussi e Boero (1998: 53-54)).

"primeiros anos". Em particular, o treino da visualização espacial não pode fazer-se de outra maneira e deve ser permanente ao longo de toda a escolaridade.

2. A experiência matemática dos alunos, no que diz respeito à geometria, deve tomar como pontos de partida
    - Os grandes temas da geometria – como a visualização, a representação, a simetria, a forma e a dimensão;
    - As conexões da geometria no interior da matemática – nomeadamente com os números, a álgebra e a análise;
    - As relações da geometria com a realidade exterior à matemática – geometria e arte, geometria e natureza, geometria e arquitectura, aplicações modernas da geometria como a robótica e a geometria do design gráfico.
3. O importante papel, tradicionalmente reservado ao ensino da geometria, de ajudar à compreensão do carácter axiomático das teorias matemáticas, deve ser prosseguido mas em novos moldes. Actividades de organização local devem ser propostas aos alunos, ao longo da escolaridade, naturalmente em consonância com a sua maturidade matemática. Além disso os alunos devem ter oportunidade de realizar algumas actividades em geometrias não euclidianas, e reflectir sobre essa experiência, dada a sua importância na filosofia da matemática e do ponto de vista da cultura científica.
4. A nova abordagem da geometria deve integrar de modo permanente a história da geometria no seu ensino. Não para entreter os alunos a copiar das enciclopédias anedotas sobre dois ou três geómetras ou as suas vidas romanceadas, mas para ajudar à compreensão
    - do papel da geometria, ao longo de milénios, na construção da sociedade actual;
    - de como conceitos importantes levam longo tempo a ser construídos e do carácter convencional e evolutivo, embora essencial, das definições em matemática;
    - do carácter universal da matemática, mas ao mesmo tempo das contribuições que diferentes povos e civilizações deram à sua construção.
5. A utilização de programas de computador dedicados ao ensino da geometria e da internet é muito importante no ensino actual da geometria e será essencial no contexto da nova abordagem que se propõe (Veloso, 1999: 31-32).

PARTE II – Estudo empírico

5. Descrição do Estudo

As práticas do ensino de Geometria no 3º Ciclo do Ensino Básico são o objecto desta investigação. Este estudo de investigação, que se apresenta, realizou-se com dados recolhidos no triénio 2002/2005: os anos lectivos de 2002/2003 (7º Ano), 2003/2004 (8º Ano) e os primeiro e segundo períodos de 2004/2005 (9º Ano) constituíram o contexto precursor da investigação. A componente empírica desta investigação teve uma ênfase especial no terceiro período de 2004/2005 nas três turmas do 9º ano da professora investigadora, de uma escola do Norte do país, Escola A. A investigação tem como foco a experiência matemática proporcionada aos alunos e o seu envolvimento na aprendizagem matemática.

Na sala de aula da disciplina de Matemática tentou-se proporcionar uma experiência matemática significativa, envolver os alunos na aprendizagem matemática e diversificar o tipo de tarefas de aprendizagem e de avaliação (com recursos, metodologias e produtos finais diversos) com o objectivo de abranger as competências essenciais a serem mobilizadas e consideradas no *currículo prescrito* (Gimeno-Sacristán, 2000). Parte-se do pressuposto de que a aprendizagem dos alunos, como um todo, acontece com um determinado *currículo em acção* e de um *currículo avaliado*[9] (Gimeno-Sacristán, 2000) constituído por conteúdos, tarefas, recursos, avaliação e competências a desenvolver – cognitivas, ético-afectivas e sociais (Pureza, 2002), através da mediação realizada pelo professor. A gestão curricular realizada, considerando o conhecimento informal e tácito de cada aluno, visou maximizar a aprendizagem matemática de todos os alunos em cada turma mas tendo a preocupação subjacente de causar menos danos na aprendizagem a cada aluno enquanto indivíduo. Com efeito sempre que se empreende e proporciona uma determinada actividade, através de uma dada tarefa, os alunos realizam aprendizagens

[9] *Currículo em acção* e *currículo avaliado* são expressões usadas por Gimeno-Sacristán (2000: 101-106): currículo em acção serve para designar o currículo que é determinado e praticado na realidade escolar; currículo avaliado serve para designar a parte do currículo que é valorizado por ser nele que incidem os testes e outros instrumentos de avaliação.

diferentes e é mais adequada a uns que a outros dependendo da história pessoal, das competências mobilizadas e desenvolvidas, dos conteúdos e processos necessários… De princípio um professor não tem conhecimento global capaz de perceber a quem será mais útil ou a quem será mais difícil resolver. Investindo na diversificação de tarefas com focos em competências diversificadas pode-se pressupor que os alunos serão o menos prejudicados mobilizando-os de forma global a todos.

Assim, o problema de investigação é:

Como articular os esforços realizados e desenvolvidos pelo professor na sala de aula (no âmbito da mediação da aprendizagem) de forma coerente e exequível, para promover aprendizagens significativas nos alunos?

Face ao problema de investigação tentaremos abordar e responder as questões de investigação seguintes:

1. Quais são as características da experiência matemática proporcionada e a sua relação com o que os alunos aprenderem?
    1.1 Como é que o professor consegue que os seus alunos se envolvam no trabalho matemático proposto? Quais as características do envolvimento dos alunos na sua aprendizagem matemática?
    1.2 De que modos o professor leva os alunos a terem consciência da aprendizagem matemática realizada?
    1.3 Como é que os alunos são desafiados a pensar profundamente sobre o que eles estão a aprender?
    1.4 Qual o impacte da abordagem curricular concebida no desenvolvimento de competências dos alunos?
2. Quais as características da avaliação implementada enquanto processo regulador das aprendizagens?
3. Qual a relação entre as tarefas de aprendizagem planificadas e as experiências de aprendizagem matemática proporcionadas?
4. Qual o papel das conferências com a *critical friend* (no desenvolvimento das experiências matemáticas proporcionadas) na gestão curricular?

Neste capítulo, da descrição do estudo, apresentaremos e desenvolveremos cinco pontos, a saber: o design da investigação, o contexto precursor, a caracterização das turmas do estudo de investigação, o planeamento da abordagem curricular sobre a qual incidiu o estudo e, por último, a apresentação dos instrumentos de recolha de dados usados neste estudo.

5.1 Design de investigação

A investigação tem uma componente empírica com ênfase especial no terceiro período do ano lectivo de 2004/2005, 9º ano de escolaridade nas turmas 9ºA, 9º B, 9º E da professora investigadora da escola A (ver Figura 5.1). A professora B, da escola B, participou no estudo como *critical friend.* Saliente-se que a professora B e a professora investigadora costumavam trabalhar em projectos comuns. A professora B também leccionava o 9º Ano. Assim a professora investigadora e a professora B, *critical friend*: elaboraram, conjuntamente, a planificação da Geometria no espaço, o pré-teste e o pós-teste para avaliação das competências desenvolvidas no tema de Geometria; implementaram, em simultâneo, as tarefas seleccionadas na planificação (cada uma em sua escola); reflectiram acerca de quais os conhecimentos e competências que os alunos tinham e de quais os conhecimentos e competências que os alunos precisavam de desenvolver; discutiram e seleccionaram os diferentes modos e metodologias para se alcançarem as metas e objectivos a atingir. As "conferências" decorreram em encontros regulares semanais, aos sábados de tarde, em que a investigadora e a *critical friend,* professora B, partilharam a sua experiência e ideias reflectindo e problematizando o ensino e aprendizagem da matemática (no ponto 5.5.5 descrever-se-á, com mais pormenor, em que é que consistiram e qual o seu papel na abordagem curricular em estudo).

As práticas de ensino da professora investigadora foco desta investigação, e que decorrem de Abril a Junho de 2005 corresponde ao 3º período do 9º ano de escolaridade e ao último período do 3º ciclo. Nestas circunstâncias há um contexto precursor onde a professora investigadora foi experimentando práticas de ensino diferentes e com características específicas: o contexto precursor será descrito com mais pormenor no ponto 5.2 deste capítulo e a caracterização das turmas onde o estudo se desenvolveu será realizada no ponto 5.3 deste capítulo. As práticas de ensino tiveram por base um planeamento realizado em conjunto pela professora investigadora e a *critical friend* e será apresentado no ponto 5.4.

No ponto 5.5 serão apresentados os métodos e os instrumentos de recolha de dados utilizados.

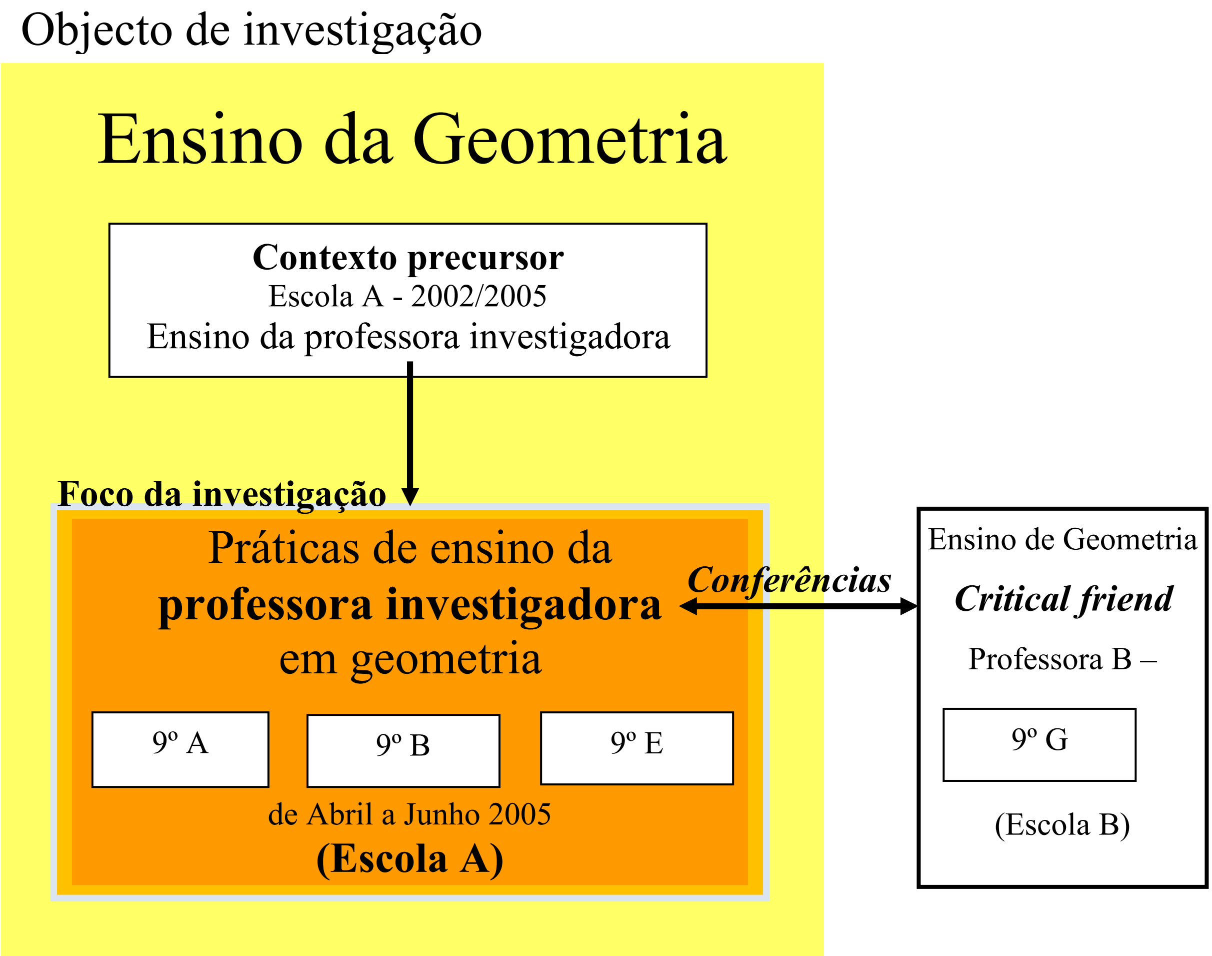


Figura 5.1: Esquema do *design* de investigação

Este trabalho segue uma metodologia de investigação de natureza qualitativa baseada num estudo de caso, com uma vertente de investigação-acção, a partir de uma abordagem curricular em Geometria no 3º ciclo do Ensino Básico: a da professora investigadora. Observação participante e uma grande diversidade de documentos constituem as principais fontes de dados. Também são considerados elementos de tipo quantitativo provenientes de testes e de questionários; os instrumentos de recolha de dados serão abordados no ponto 5.5.

5.2 Contexto precursor

O grupo de professores que leccionavam o 9º ano de escolaridade na escola A (a professora investigadora (turmas A, B e E), o professor D (turma D) e a professora F (turmas C e F)) reunia regularmente para reflectir conjuntamente acerca da evolução do ensino e aprendizagem dos alunos de 9º Ano, na disciplina de Matemática. Nas reuniões de grupo de professores do 9º ano, destinadas a tomar decisões sobre a gestão do currículo, eram discutidos essencialmente, momentos e tempos destinados aos temas a trabalhar e em particular aos conteúdos a leccionar. Os trabalhos de projecto a implementar também eram discutidos. Quando se discutia a diversificação das tarefas (quanto à natureza, tipo e formato) e dos instrumentos de avaliação a implementar a falta de tempo justificava, normalmente, a não disponibilidade para o seu uso. A professora investigadora sempre apresentou ao grupo de professores referido as suas opções/decisões tomadas em termos de currículo em acção.

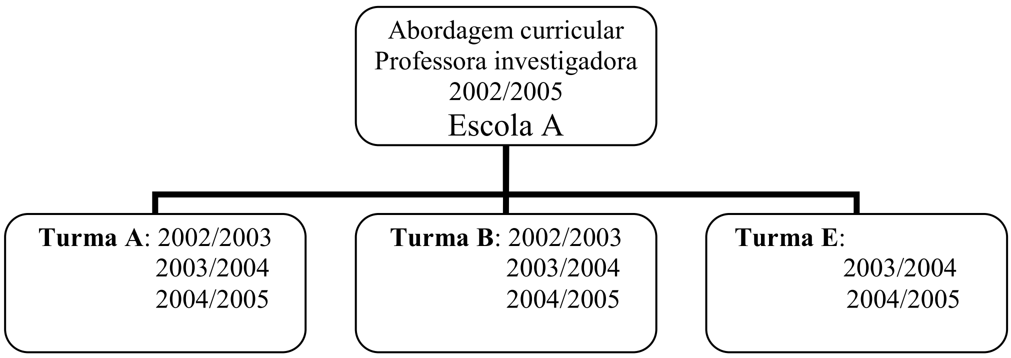


Figura 5.2: Explicitação da situação das turmas da professora investigadora

A professora investigadora era professora das turmas A e B desde 2002/2003 e da turma E a partir de 2003/2004 conforme se pode observar na Figura 5.2.

5.2.1 Trabalho desenvolvido no ciclo 2002/2005

Apesar da investigação realizada se centrar no 3º período de 2004/2005 e na abordagem e gestão curriculares do tema geometria, a professora investigadora tinha vindo a ensaiar, desde 2002/2003, um currículo que proporcionasse experiências matemáticas diversificadas: implementando tarefas de diferentes naturezas (problemas, investigação, experimentais, etc.) com recurso a materiais manipuláveis diversos e à calculadora, investindo no trabalho de grupo, trabalhando a comunicação matemática e recorrendo a instrumentos de avaliação diversificados para além dos testes tradicionais.

7º ano (A e B) - 2002/2003

Neste ano os directores de turma destas duas turmas realizaram a caracterização das turmas. As cinco turmas de 7º Ano tinham em média 28 alunos, máximo permitido por lei. Na disciplina de Matemática, em jeito de diagnóstico, fez-se a recolha de informações acerca da relação emocional dos alunos com a Matemática (ver anexo V) tendo-se constatado que 82% dos alunos da turma A e 93% dos alunos da turma B do 7º Ano "gostavam da Matemática". Este ponto de partida apresentava potencialidades e boas perspectivas no que se refere ao trabalho matemática a realizar em sala de aula.

Na Tabela 5.1 apresentam-se as diferentes tarefas de aprendizagem, não rotineiras, e as respectivas características que foram implementadas no 7º ano, o número de testes e o mês em que se realizaram e as tarefas que simultaneamente foram consideradas de aprendizagem e de avaliação, isto é, em que eram recolhidos em suporte físico o produto final do trabalho dos alunos para constituírem dados concretos e directos para a sua avaliação.

<table>
<tr><th colspan="2">7º Ano-02/03</th><th>1º Período</th><th>2º Período</th><th>3º Período</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nº de testes (mês)</td><td>2 (Out. e Nov.)</td><td>2 (Jan. e Mar)</td><td>1 (Junho)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarefas de aprendizagem (trabalho de grupo- TG)</td><td>Investigação* sobre terminações das potências de base compreendida entre 1 e 9 (Set.)
Investigação sobre potências de base 5* (Nov.)</td><td>Estudo estatístico: recolha e análise de um conjunto de dados s/ a família de cada aluno</td><td>Investigação s/ pentaminós
Investigação s/ hexaminós (TPC)
Investigação sobre os diferentes polígonos que se podem construir com o Tangram (a pares)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tarefas de Avaliação e aprendizagem</td><td>TG</td><td>Resolução de problema - Semanada da Josefina (progressão aritmética e geométrica)* (Nov.)</td><td></td><td>Trabalho experimental - Famílias de poliedros com o polydron (Maio)</td></tr>
<tr><td>Individual</td><td></td><td>Investigação* sobre as fracções de denominadores 9 e 11 (Fev.)</td><td>Investigação sobre Hexadiamantes (Maio): com recurso a recortes de papel e a triângulos do polydron</td></tr>
<tr><td colspan="5">*uso de calculadora simples</td></tr>
</table>

Tabela 5.1: Tarefas não rotineiras implementadas no ano 2002/2003

Em Abril de 2003 os alunos fizeram uma avaliação do trabalho desenvolvido considerando os testes, o trabalho individual – relatórios /comunicação e o comportamento/atitudes e capacidades/ aptidões. Em Junho de 2003 reflectiram acerca do trabalho desenvolvido ao longo do ano incluindo o desenvolvido no 3º Período explicitando o trabalho no formato de trabalho de grupo, o recurso aos materiais manipuláveis (pentaminós, *polydron*, *tangram*), as actividades de investigação, etc. Também puderam explicitar no que é que tiveram mais dificuldades. Este foi um primeiro momento de avaliação da gestão e desenvolvimento curricular realizado pelos alunos de forma aberta e escrita em suporte de papel.

8º ano (A, B e E) - 2003/2004

Neste ano os directores de turma das três turmas realizaram a caracterização das turmas. A turma A manteve-se praticamente inalterada. A turma B tinha um aluno com Necessidades Educativas Especiais (NEE) identificado no ano anterior e teve que ser redimensionada ficando apenas com 20 alunos. A escola que tinha tido apenas 5 turmas de 7º Ano passou a ter 6 turmas de oitavo ano pela redistribuição dos alunos provenientes da turma B. Como não tinha havido retenções significativas no 7º Ano mas bastantes retenções no 8º ano (dava para formar uma turma exclusivamente constituída por alunos retidos) a escola optou, pedagogicamente, por retirar aleatoriamente 3 alunos de cada turma de 7º ano e com os alunos restantes da turma do 7º B formaram uma nova turma – o 8º F. Os alunos retidos no 8º ano seriam distribuídos igualmente pelas turmas de 8º ano: em média 3 a 4 alunos por turma de 8º Ano. A turma E tinha trabalhado com o professor D no 7º Ano. Na Tabela 5.2, abaixo, são explicitadas, por período, as tarefas não rotineiras que foram implementadas no 8º ano.

<table>
<tr><th colspan="2">8º Ano-03/04</th><th>1º Período</th><th>2º Período</th><th>3º Período</th></tr>
<tr><th colspan="2">Nº de testes (mês)</th><td>1 (Out.)</td><td>2 (Jan. e Mar)</td><td>1 (Maio)</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Tarefas de aprendizagem</th><th>TG</th><td>Decomposição de figuras –uso do Tangram – trabalho de pares (Set.)</td><td>Trabalho de projecto: “As translações estão em toda a parte”: elaboração final de cartaz* que seria exposto numa actividade designada “Semana da Ciência”</td><td></td></tr>
<tr><th>Individual</th><td>Pitágoras em puzzle-demonstração geométrica – recorte da brochura de apoio e colagem no caderno diário</td><td></td><td></td></tr>
<tr><th rowspan="2">Tarefas de Avaliação e aprendizagem</th><th>TG</th><td>Actividade de investigação – problema de Euclides – rectângulos isoperimétricos (Dez.)</td><td></td><td>Apresentação oral à turma do cartaz concluído no 2º Período relativo ao trabalho de projecto implementado</td></tr>
<tr><th>Individual</th><td>Funções - Leitura e interpretação gráfica-elaboração de relatório/comunicação (Nov.)</td><td>Estudo estatístico: relatório/comunicação a partir de uma dada recolha de dados/situação apresentada(Mar.)</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">*Os temas aglutinadores para os 7 grupos de cada turma: casas, pavimentações de Escher, tapetes (Arraiolos), azulejaria, calçadas, frisos decorativos e Monumentos – cada grupo na turma trataria um tema</td></tr>
</table>

Tabela 5.2: Tarefas não rotineiras implementadas no ano 2003/2004

Em Outubro foi realizada uma ficha de avaliação intermédia relativa ao 1º período. No teste realizado em Outubro para além da menção qualitativa de avaliação todos os alunos receberam *feedback* escrito, na folha de teste, acerca do trabalho individual que estavam a realizar; este *feedback* ora reforçava a atitude/tipo de trabalho que o aluno tinha encetado e que estava a ter resultados ora chamava a atenção para a necessidade de ajuste no trabalho e estratégias adoptadas para o desenvolvimento da aprendizagem matemática. Os alunos realizaram, ao longo do ano, avaliações individuais, pessoais e escritas sobre o trabalho que estavam a desenvolver na disciplina de Matemática: no final do 1º Período, em Dezembro; no final do 2º Período, em Março e no final do 3º Período, em Junho. No início do 3º período, em Abril, realizaram, também, o balanço final do trabalho realizado até ao início do 3º Período e explicitaram quais as intenções relativas ao trabalho no 3º Período na disciplina e estratégias a encetar para alcançarem as metas académicas pessoais.

9º ano (A, B e E) - 2004/2005

As turmas constituídas no ano anterior mantiveram-se quase inalteradas à excepção dos alunos que ficaram retidos no 8º Ano e dos alunos que tendo ficado retidos no 9º Ano integraram as turmas novas de 9º Ano. Os directores de turma fizeram a caracterização das turmas. Na Tabela 5.3, abaixo, são explicitadas, por período, as tarefas não rotineiras que foram implementadas no 9º ano até aos subtemas de Trigonometria e de Geometria no Espaço que constarão de forma mais descriminada e detalhada num item posterior, ponto 5.4.

<table>
<tr><th colspan="2">9º Ano-04/05</th><th>1º Período</th><th>2º Período</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nº de testes (mês)</td><td>2 (Out., Nov)
+1 Teste de recuperação</td><td>1 (Fev.)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarefas de aprendizagem</td><td></td><td>Trabalho de projecto: “As rotações estão em toda a parte”: elaboração de dossier e de cartaz*
Apresentação oral à turma no 3º Período do cartaz concluído no 2º Período.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tarefas Avaliação aprendizagem</td><td>TG</td><td></td><td>Actividade de investigação sobre fracções cujos denominadores são 11 ou potências de base 2 (e numerador 1).</td></tr>
<tr><td>Individual</td><td>Equações literais – problema - Relatório/comunicação (Nov.)</td><td>Sequências de dízimas (Jan)
Representação de dízimas – fracções; enquadramentos</td></tr>
</table>

Tabela 5.3: Tarefas não rotineiras implementadas no ano 2004/2005 no 1º e 2º Períodos

Os alunos realizaram, ao longo do ano, avaliações individuais, pessoais e escritas sobre o trabalho que estavam a desenvolver na disciplina de Matemática: no final do 1º Período, em Dezembro; no final do 2º Período, em Março e no final do 3º Período em Junho. No início do 2º período, em Janeiro, realizaram, também, o balanço final do trabalho realizado até ao início do 2º Período e explicitaram quais as intenções relativas ao trabalho no 2º Período na disciplina e quais as estratégias a implementar para alcançarem o que desejavam.

5.2.2 Linhas de força do trabalho desenvolvido no contexto precursor

Os alunos das turmas A, B e E da Escola A foram desenvolvendo hábitos de trabalho de grupo na realização de tarefas que envolviam resolução de problemas, actividades de investigação e de trabalho de projecto.

Como se pode constatar nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, os alunos realizaram dois trabalhos de projecto, um no 8º Ano e outro no 9º ano tendo como temas, respectivamente, as translações e as rotações; a Estatística ora trabalhada em grupo ora através de um trabalho individual de interpretação de dados e da elaboração de relatórios finais permitiu, também, desenvolver a comunicação matemática. No ciclo de aprendizagem de 2002 a 2005 (anterior ao trabalho base desta investigação) poderíamos afirmar que se tentou diversificar as tarefas de aprendizagem pois foram realizadas 9 actividades de investigação, 5 de resolução de problemas, algumas tarefas experimentais (família de poliedros, construção de diferentes polígonos com as peças do tangram, …). A diversificação de materiais manipuláveis também foi uma realidade tendo-se usado recortes de papel, o *polydron*, o *tangram*, os pentaminós e as calculadoras simples.

No que se refere à avaliação eram considerados, para além dos testes tradicionais, tarefas de avaliação/aprendizagem em que os produtos finais podiam ter várias formas (relatórios, composições, cartaz, dossier,…) que eram consideradas na avaliação final dos alunos. Estas tarefas de avaliação e aprendizagem eram realizadas ora em grupo ora individualmente conforme se pode constatar nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3. O *feedback* escrito era outra forma de avaliação que se proporcionava aos alunos: nos produtos finais das tarefas de avaliação e aprendizagem para além de se registar a avaliação qualitativa do trabalho desenvolvido através de uma palavra/etiqueta (não satisfaz, satisfaz, bom, muito bom) normalmente fazia-se referência à qualidade do processo desenvolvido, à adequação do trabalho dos elementos do grupo, a aspectos que precisavam de melhoria, etc.. Também foi dado *feedback* escrito num teste, em Outubro de 2003/2004, a todos os alunos. Enquanto os alunos desenvolviam a actividade proporcionada pelas tarefas propostas a professora/investigadora interpelava os alunos dando *feedback* oral no sentido de reorientar a actividade na sala de aula para uma melhor centração na aprendizagem matemática. Os alunos, ao longo do ciclo, foram submetidos a diferentes momentos de (auto)reflexão/(auto)avaliação do trabalho desenvolvido explicitando em papel e por escrito os aspectos fortes e os menos conseguidos ao longo do período. Estes momentos ocorriam, sistematicamente, nos finais de período e de forma mais pontual, nalgum início de período onde faziam o balanço do trabalho desenvolvido até aí e projectavam o trabalho matemático ajustando estratégias de estudo, actuação e comportamento para manter e/ou melhorar o aproveitamento e consequente aprendizagem à disciplina de Matemática no período que iniciavam. Este trabalho de metacognição que envolvia auto-avaliação e auto-reflexão (em diferentes dimensões) partiu do pressuposto de que os alunos teriam a ganhar se estivessem, por um lado, conscientes do trabalho e aproveitamento realizados e, por outro, se estabelecessem objectivos pessoais e estratégias de consecução das metas que desejavam alcançar. Pressupunha-se, ainda, que este movimento favorecia a responsabilização e autonomia de cada aluno para além de dar informações regulares ao professor de como cada aluno se posicionava relativamente à aprendizagem e aproveitamento a Matemática. A classificação para o 7º e 8º ano era obtida de forma ponderada: 70% para testes (em média 2 por período) e trabalhos individuais, e 10% para trabalhos realizados em grupo (3 a 4) no domínio predominantemente cognitivo (80% no total); no 9º Ano esta ponderação foi reajustada sendo atribuído 60% para os testes e trabalhos individuais e 20% para os trabalhos de grupo. No domínio predominantemente afectivo/comportamental era, em ambos os casos, 10% para "Capacidades e aptidões" e 10% para "Comportamentos, atitudes e valores". Enquanto os dois primeiros itens correspondentes ao domínio predominantemente cognitivo resultavam da recolha e avaliação de produtos de actividades realizadas pelos alunos, os aspectos do domínio predominantemente afectivo comportamental resultavam da observação directa em sala de aula. As "Capacidades e aptidões" e "Comportamentos, atitudes e valores" foram avaliadas de forma qualitativa em cinco posições distintas: "Não satisfaz nada", "Não satisfaz", "Satisfaz", "Bom" e "Muito Bom". Na classificação final estas posições correspondiam, na escala de 0 a 100%, respectivamente, às percentagens seguintes: 0 (zero por cento), 3 (três por cento), 5 (cinco por cento), 7 (sete por cento) e 10 (dez por cento). Os critérios apresentados com as respectivas ponderações foram propostos pelo grupo disciplinar e ratificados em Conselho Pedagógico da Escola A, nos anos lectivos considerados.

Em síntese, podemos afirmar que se identificam as seguintes linhas de força trabalhadas de forma deliberada, contínua e sistemática:

i. houve um esforço de planificação (incluindo tarefas de diversas naturezas, de diferente tipos e em diferentes formatos, mobilização de recursos, implementação de instrumentos de avaliação diversificados) sem esquecer o alinhamento entre tarefas e competências a desenvolver;
ii. houve um envolvimento dos alunos em tarefas diversificadas e de carácter não rotineiro;
iii. a avaliação aparece intimamente ligada à aprendizagem e ao ensino e há aspectos característicos de uma avaliação formativa alternativa (Fernandes, 2005);
iv. os alunos realizaram regularmente, pelo menos uma vez por período, de forma escrita, a auto-avaliação e auto reflexão sobre o processo de aprendizagem;
v. o professor dava *feedback* aos alunos de forma escrita nos trabalhos realizados especialmente em grupo ainda que uma das vezes o tivesse feito num teste;
vi. os dados recolhidos das tarefas de avaliação provinham de diferentes formatos de trabalho – ora em grupo ora de forma individual, de tarefas de natureza diferente – problemas, tarefas de investigação, trabalho de projecto;
vii. os produtos finais eram diversificados: teste, relatórios, redacção, cartazes, apresentação oral;
viii. trabalhou-se a comunicação matemática (oral e escrita) como um fim em si mesmo para além do seu uso sistemático como um meio;
ix. foi desenvolvido e implementado a resolução de problemas e, por último,
x. investiu-se no raciocínio matemático através de tarefas complexas e de alto nível de desenvolvimento.

5.3 Caracterização das turmas do estudo

Os sujeitos da investigação são a professora investigadora e suas turmas A, B e E, do 9º Ano, da Escola A. Para ajudar a aprofundar o estudo há a *critical friend* que é a professora B, da Escola B. Como referentes externos, da Escola A: a turma D do professor D, a turma F da professora F.

Passaremos a descrever, sumariamente, as turmas 9º A, 9º B e 9º E.

A turma A do 9º Ano tinha 8 raparigas (29%) e 20 rapazes (71%) num total de 28 alunos. A média de idades dos alunos era de 14 anos havendo uma aluna com 18 anos, um aluno com 17 anos e 9 alunos com 13 anos; neste 9º Ano tinham sido acrescentados à turma quatro alunos retidos no 9º Ano o que representava 15% da turma; 3 alunos tinham transitado do 8º para o 9º ano com um número de níveis inferiores a três superior a ou igual a quatro; 15 alunos transitaram sem nenhum nível inferior a três (54%); 9 alunos estavam fora da escolaridade obrigatória (33%); 20 alunos da turma não tinham tido qualquer retenção no 3º Ciclo (72%). As habilitações académicas dos pais destes alunos estavam distribuídas do seguinte modo: 36% tinham curso médio ou superior; 20% tinham 11º ou 12º Ano; 9% tinham o 3º Ciclo; 13% tinham o 2º ciclo; 16% tinham o 1º ciclo e 7% não estavam referenciados.

A turma B do 9º Ano tinha 11 raparigas (58%) e 8 rapazes (42%) num total de 19 alunos. A média de idades dos alunos era de 14 anos havendo um aluno com 16 anos e alguns alunos com 13 anos; neste 9º Ano tinham sido acrescentados à turma três alunos retidos no 9º Ano o que representava 16% da turma; 3 alunos estavam fora da escolaridade obrigatória (16%); 15 alunos da turma não tinham tido qualquer retenção no 3º Ciclo (79%). As habilitações académicas dos pais destes alunos estavam distribuídas do seguinte modo: 18% tinham curso médio ou superior; 8% tinham 11º ou 12º Ano; 16% tinham o 3º Ciclo; 16% tinham o 2º ciclo; 18% tinham o 1º ciclo e 24% não estavam referenciados.

A turma E do 9º Ano tinha 12 raparigas (44%) e 15 rapazes (56%) num total de 27 alunos. A média de idades dos alunos era de 14 anos havendo dois alunos com 17 anos e dois alunos com 13 anos; neste 9º Ano tinham sido acrescentados à turma três alunos retidos no 9º Ano o que representava 11% da turma; 8 alunos estavam fora da escolaridade obrigatória (29%); 17 alunos da turma não tinham tido qualquer retenção no 3º Ciclo (63%). As habilitações académicas dos pais destes alunos estavam distribuídas do seguinte modo: 11% tinham curso médio ou superior; 22% tinham 11º ou 12º Ano; 13% tinham o 3º Ciclo; 17% tinham o 2º ciclo; 26% tinham o 1º ciclo e 11% não estavam referenciados.

5.4 Planeamento da abordagem curricular

No que se refere ao planeamento da abordagem curricular teve-se em atenção a análise da documentação normativa em vigor e o manual adoptado, comum às duas escolas, como um recurso fundamental uma vez que todos alunos o deveriam ter. Passaremos a apresentar a planificação síntese das tarefas adoptadas por subtema (trigonometria, geometria no espaço e rotações) para depois se passar a caracterizar cada tarefa. As rotações aparecem como conteúdo programático prévio à trigonometria e à Geometria no espaço e será trabalhado previamente mas será apresentado no final desta secção 5.4, no item 5.4.4.

5.4.1 Trigonometria

Ao planificar-se a trigonometria tentou utilizar-se tarefas que partissem dos conhecimentos prévios dos alunos; a sua resolução deveria poder ser realizada pelos alunos com os conceitos já adquiridos anteriormente. As tarefas propostas no manual adoptado e que introduziam os diferentes conteúdos, de forma experimental, preenchiam os requisitos considerados fundamentais. Pretendia-se que os alunos pudessem construir os conhecimentos matemáticos tendo como ponto de partida o conhecimento informal que já detinham (fosse proveniente da escola ou da vida do dia-a-dia), experimentando processos fundamentais não só para a matemática mas essencialmente para o exercício da cidadania crítica, tais como, organização de informação, observação de regularidades, identificação e comunicação de regularidades observadas (interpares e ao grupo turma).

Trigonometria do triângulo Rectângulo / **Bloco**	**Tarefa**	**Subtema, tipo de trabalho/recurso**	**Assunto**	**Avaliação**
1º Bloco	**Tarefa T1**: Actividade 1 da página 80 do manual adoptado	Ângulo agudo	Razões trigonométricas do ângulo agudo	Relatórios (grupos) avaliados pelo professor com menções qualitativas
2º Bloco	**Tarefa T2**: Actividade 1 da página 84 do manual adoptado	Razões trigonométricas	Relações entre as razões trigonométricas	Relatórios (grupos) avaliados pelo professor com menções qualitativas
3º Bloco	**Tarefa T3**: Actividade da página 92-93 do manual adoptado	Astrolábio e trabalho de projecto	Determinação de alturas de objectos inacessíveis	Relatórios (grupos) avaliados pelo professor com menções qualitativas

4º Bloco	**Tarefa T3**: conclusão	Astrolábio e trabalho de projecto	Determinação de alturas de objectos inacessíveis	
Competências gerais da Matemática Ens. Básico	A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada às situações apresentadas; A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou o astrolábio construído;			
Competências gerais e específicas da Geometria Ens. Básico	A sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real; A aptidão para efectuar medições em situações diversas e efectuar estimativas, bem como a compreensão do sistema métrico;			
Competências específicas da Geometria no 3º Ciclo	O reconhecimento de significado de fórmulas e a sua utilização no cálculo de comprimentos em situações diversificadas incluindo o de objectos inacessíveis; A sensibilidade para relacionar a Geometria com a técnica (astrolábio)			

Tabela 5.4: Tabela síntese das tarefas para o subtema de trigonometria

Pretendeu-se também recorrer a tarefas centradas em situações da vida real que mobilizassem a matemática (em particular a trigonometria) como ferramenta imprescindível: optou-se pela construção de um astrolábio e pela medição de objectos de alturas inacessíveis – Tarefa T3. Na planificação esta tarefa seria desenvolvida num primeiro bloco e concluída num segundo bloco. As competências que se pretenderam desenvolver, com as tarefas seleccionadas para a aprendizagem da Trigonometria, foram as que se encontram descritas na Tabela 5.4.

5.4.2 Geometria no espaço

No tema Geometria no Espaço decidimos construir e preparar tarefas não rotineiras que considerassem os conteúdos fundamentais sem descurar as competências transversais da comunicação matemática, da resolução de problemas, do raciocínio matemático e neste, em especial, o raciocínio hipotético-dedutivo com explicitação da demonstração, estabelecendo o máximo de conexões, diversificando os recursos (materiais manipuláveis, calculadoras e computador), investindo no trabalho de grupo e mobilizando diferentes instrumentos de avaliação. Apesar de termos analisado as propostas do manual consideramo-las bastante rotineiras não permitindo mobilizar as aprendizagens que considerávamos fundamentais e daí o planeamento de outras que permitissem proporcionar uma experiência matemática bastante diversificada (a diferentes níveis) e que pudesse ser suficientemente significativa para os alunos. O planeamento teve em conta não só os conteúdos e os processos fundamentais considerados no currículo prescrito (Gimeno-Sacristán, 2000) como o conhecimento informal dos alunos das turmas. Na Tabela 5.5, apresentam-se as tarefas não rotineiras a implementar no subtema geometria no espaço.

Geometria no espaço / **Bloco**	**Tarefa/ subtema**	**Assunto**	**Avaliação**
1º Bloco	**Tarefa G1**: Prismas e pirâmides	Noções básicas, áreas e volumes	Ficha devidamente preenchida (grupos) Avaliados pelo professor com menções qualitativas Com explicitação das dificuldades +apresentação à turma (individual)
2º Bloco	**Tarefa G2**: Prismas e pirâmides	Posições relativas de planos, de rectas e planos e de rectas; critérios de paralelismo e perpendicularidade; áreas e volumes	Ficha devidamente preenchida (grupos) Avaliados pelo professor com menções qualitativas
3º Bloco	**Tarefa G3**: Prismas e pirâmides	Relação de Euler	Ficha devidamente preenchida (grupos) Avaliados pelo professor com menções qualitativas
4º Bloco	**Tarefa G4**: Sólidos de revolução - cone, cilindro e esfera	Resolução de problemas, áreas e volumes	Ficha devidamente preenchida (grupos) Avaliados pelo professor com menções qualitativas
5º Bloco	**Tarefa G5**: Lugares geométricos	Demonstração e uso do GSP	Ficha devidamente preenchida (grupos) Avaliados pelo professor com menções qualitativas
6º Bloco	**Tarefa G6**: manual adoptado, Act. 1 da pág. 116-117 - Demonstração	Construção hipotético-dedutiva	Ficha devidamente preenchida (grupos) Avaliados pelo professor com menções qualitativas

Tabela 5.5: Tarefas não rotineiras para o subtema de geometria no espaço

5.4.3 Caracterização das tarefas de Geometria no espaço

As tarefas planificadas foram definidas da seguinte maneira. Foram consideradas sete tarefas para a Geometria no espaço: cinco foram elaboradas em conjunto pela professora investigadora e pela *critical friend* (tarefas G1, G2, G3, G4 e G5), o trabalho de projecto foi planeado pela professora investigadora e apenas uma tarefa foi retirada do manual (a correspondente ao raciocínio dedutivo). Todas as outras mobilizariam diversos conhecimentos e processos matemáticos e teriam dois fins: caso os alunos já tivessem os pré-requisitos, os conhecimentos seriam mobilizados de forma anteriormente não mobilizada e não constituiria motivo de repetição de tarefa; caso os alunos não tivessem os conhecimentos básicos já adquiridos poderiam com as tarefas propostas contactar com os conceitos e conhecimentos e ter hipóteses de os aprender sem se sentirem excluídos ou descriminados uma vez que a tarefa constituiria um desafio para todos os alunos.

5.4.3.1 Tarefa G1: Prismas e pirâmides

Assunto: Revisão de noções básicas de áreas e volume de poliedros.

Tarefa G1

a) Utilizando as peças do *polydron* constrói uma pirâmide/prisma (a definir).

b) Com o poliedro construído apresenta, se possível, 3 planificações diferentes[10] do mesmo e completa a tabela seguinte:

Planificação (desenho)	Nº de lados	Perímetro	Área	Volume	Nº de eixos de simetria. Desenha-os na planificação da 1ª coluna	Nº de eixos de simetria (planos) da pirâmide /prisma _________

Subtarefas / **Tarefa G1**	Construir um poliedro: ou pirâmide ou prisma (diversos)	Planificação: 3 diferentes	Preencher tabela	Elaborar relatório	Apresentar o trabalho à turma
Natureza de tarefa	experimental	investigação	Contagem(precisão conceitos), comparação Cálculo	Observar, identificar regularidades. Comunicação matemática escrita	Comunicação matemática oral
Conceitos mobilizáveis	Pirâmide, prisma, polígonos, bases/ faces laterais; vértice da pirâmide, faces, lados, vértices	planificação	Lado, perímetro, área, volume simetria, eixo	Superfícies equivalentes. Perímetro e volumes equivalentes	
Competências gerais Matemática Ens. Básico	A predisposição para raciocinar matematicamente. A aptidão para discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso da linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação.				
Competências gerais e específicas da Geometria E. B	A aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas com recurso a materiais manipuláveis. A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações.				
Competências específicas da Geometria no 3ºCiclo	A compreensão do significado da forma de uma figura geométrica e o reconhecimento das relações entre elementos de figuras semelhantes; A tendência para procurar invariantes em figuras geométricas.				

Tabela 5.6: Características da Tarefa G1 do subtema de geometria no espaço

[10] As planificações são consideradas diferentes caso não se possam sobrepor.

Os instrumentos de avaliação a recolher eram o relatório e acetato elaborados por grupo, com base na actividade resultante da resolução da tarefa proposta. Os aspectos fundamentais do trabalho desenvolvido no grupo, com base na tarefa proposta, seriam organizados em acetato para serem apresentados oralmente à turma por um dos alunos do grupo. Estes instrumentos de avaliação deveriam ser recolhidos pela professora investigadora durante a aula para posteriormente serem devolvidos aos grupos com *feedback* onde constassem menções qualitativas correspondentes às apreciações do trabalho realizado (produto final e processo).

As competências que se pretenderam desenvolver com a Tarefa G1 para a aprendizagem da geometria são as que encontram descritas na Tabela 5.6.

5.4.3.2 Tarefa G2: Prismas e pirâmides

Assunto: Posições relativas de rectas e planos. Critérios de paralelismo e de perpendicularidade. Áreas e volumes.

Figura do prisma ou da pirâmide

Tarefa G2

Observa a figura

1. Constrói o prisma/pirâmide com as peças do *polydron*.
2. Identifica no sólido em estudo, caso existam, um par de planos:
    a) Estritamente paralelos.
    b) Perpendiculares e a sua recta de intersecção.
    c) Oblíquos e a sua recta de intersecção.
    d) Paralelos coincidentes.

    Recorrendo à informação constante no manual adoptado e aos critérios de paralelismo e perpendicularidade entre planos justifica as escolhas feitas acima (enunciando os princípios em que baseaste).
3. Identifica no sólido em estudo, caso existam, uma recta e um plano:
    a) Estritamente paralelos.
    b) Perpendiculares e o seu ponto de intersecção.
    c) Oblíquos e o seu ponto de intersecção.
    d) Em que a recta está contida (aposta ao) no plano.

Recorrendo à informação constante no manual adoptado e aos critérios de paralelismo e perpendicularidade entre planos justifica as escolhas feitas acima (enunciando os princípios em que te baseaste).

4. Identifica no sólido em estudo, caso existam, um par de rectas:
    a) Estritamente paralelas.
    b) Perpendiculares e o seu ponto de intersecção.
    c) Oblíquas e o seu ponto de intersecção.
    d) Paralelas coincidentes.
    e) Não complanares.

Apresenta um esquema/síntese das posições relativas de rectas no espaço.

5. Retomando o poliedro da figura.
    a) Desenha na tua folha de papel o poliedro considerado.
    b) Considera na figura o ponto M (ponto médio da base superior do prisma).
    c) Desenha a pirâmide com a mesma base do prisma e com vértice em M.
    d) Conjectura[11] sobre a relação entre o volume do prisma e o da pirâmide.
    e) Calcula os valores e confirma/infirma a tua conjectura.

6. Será que a relação conjecturada na 5. d) e confirmada/infirmada na 5. e) se verifica para todos os prismas e pirâmides (inscritas nos primeiros)? Se sim, em que condições? Tenta mostrar e fundamentar a tua afirmação.

Subtarefas / **Tarefa G2**	Construir poliedros: prismas diversos	Determinar a posição relativa entre planos, 2., 3., 4.	Desenhar Prisma incluindo a pirâmide com vértice no centro da base superior 5.	Discutir o trabalho realizado com toda a turma 6.
Natureza de tarefa / Tipo de competências a desenvolver	Experimental	Observar, identificar regularidades. Comunicação matemática escrita	Representação de sólidos no plano	Abstracção, intuição espacial
Conceitos	Prisma polígonos bases/ faces laterais. Faces lados vértices	Paralelismo, perpendicularidade, concorrência, recta, plano	Ponto médio da face, prisma Pirâmide, vértices de pirâmide.	Prismas, pirâmides, altura comum, base comum
Processos	Experimentação	Observação, identificação e comunicação	Estimação, representação dos sólidos no plano	Generalização, demonstração
Construção hipotético-dedutiva		Axiomas de incidência, 5º Axioma de Euclides, Teorema (hipótese e tese)	Formulação de uma hipótese; Confirmação/infirmação da hipótese	Demonstração aparente

[11] Uma conjectura é uma suposição, uma hipótese que se avança, uma opinião que deve ser certificada.

Competências gerais Matemática EB	A aptidão para discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso da linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação. A tendência para procurar ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente na situação.
Competências gerais e específicas da Geometria EB	A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria; A compreensão de conceitos e aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos; O gosto por investigar propriedades e relações geométricas.
Competências específicas da Geometria no 3ºCEB	A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas através da análise e comparação de figuras para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios; A aptidão para resolver problemas geométricos através de construções assim como para justificar os processos utilizados.

Tabela 5.7: Características da tarefa G2 do subtema de geometria no espaço

O instrumento de avaliação a recolher era a ficha onde cada grupo deveria ter realizado o trabalho. Um aluno por grupo deveria apresentar o trabalho de grupo à turma. A ficha deveria ser recolhida pela professora investigadora durante a aula para posteriormente ser devolvida a cada grupo com *feedback* onde constassem menções qualitativas correspondentes à apreciação do trabalho realizado (produto final e processo). A professora deveria fazer a correcção da tarefa com toda a turma.

As competências que se pretenderam desenvolver com a Tarefa G2 para a aprendizagem da geometria são as que encontram descritas na Tabela 5.7.

5.4.3.3 Tarefa G3: Prismas e pirâmides

Assunto: Relação de Euler.

Tarefa G3

Observando a pirâmide e os 3 prismas distintos com que o grupo trabalhou

1) Preenche a tabela seguinte:

Designação do poliedro	Nº de faces (**F**)	Nº de vértices (**V**)	Nº de arestas (**A**)	**F**+**V**	**A**+2

2) Descreve as regularidades[12] da tabela e apresenta os cálculos que efectuaste.

3) Prepara a apresentação da tabela em acetato, com os dados dos dois subgrupos.

[12] Considera-se regularidade as possíveis relações de dados que permitam inferir as características que se mantêm constantes

Subtarefas / Tarefa G3	Construção de poliedros (4 modelos)	Preenchimento de tabela	Elaborar relatório – descrição de regularidades	Apresentar o trabalho à turma
Natureza de tarefa	experimental	Contagem (precisão conceitos), comparação Cálculo	Observar, identificar regularidades. Comunicação matemática escrita	Comunicação matemática oral
Conceitos	Pirâmide, prisma, polígonos, bases/ faces laterais; vértice da pirâmide. Faces, lados vértices	Aresta, face, vértice, conceitos de incidência	Invariância de F+V e A+2: Fórmula de Euler	
Processos	Experimentação, construção	Contagem	Generalização	
Competências gerais Matemática Ens. Básico	A predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas e formular generalizações. A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso da linguagem, escrita ou oral, não ambígua e adequada à situação.			
Competências gerais e específicas da Geometria EB	A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas.			
Competências específicas da Geometria no 3ºCiclo	A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios; A tendência para procurar invariantes em figuras geométricas e para utilizar modelos geométricos na resolução de problemas			

Tabela 5.8: Características da tarefa G3 do subtema de geometria no espaço

Os instrumentos de avaliação a recolher eram o relatório e acetato elaborados por grupo, com base na actividade resultante da resolução da tarefa proposta. Os aspectos fundamentais do trabalho desenvolvido no grupo, com base na tarefa proposta, seriam organizados em acetato para serem apresentados oralmente à turma por um dos alunos do grupo. Estes instrumentos de avaliação deveriam ser recolhidos pela professora investigadora durante a aula para posteriormente serem devolvidos aos grupos com *feedback* onde constassem menções qualitativas correspondentes às apreciações do trabalho realizado (produto final e processo).

A professora deveria fazer a correcção da tarefa com toda a turma sistematizando os aspectos mais importantes, chamando a atenção para as conclusões fundamentais e para a precisão dos conceitos envolvidos na realização da tarefa.

As competências que se pretenderam desenvolver com a Tarefa G3 para a aprendizagem da geometria são as que encontram descritas na Tabela 5.8.

5.4.3.4 Tarefa G4: Sólidos de revolução

Assunto: Áreas, volumes, planificações e resolução de problemas.

Tarefa G4

1. Considerando os objectos apresentados (copo (tronco de cone) e rolo de papel (cilindro com um buraco)).

a) Calcula a área lateral e total de cada um.
b) Determina o seu volume.
c) Faz uma planificação do tronco de cone.
d) Imagina que queres construir uma caixa invólucro com 6 rolos de papel, por que forma vais optar? Que quantidade de material vais usar? E qual o volume que ocupa?

2. Resolve o problema "O volume da esfera" da página 126 do teu manual.

3. Elabora um relatório com o trabalho desenvolvido pelo grupo. É fundamental apresentar as resoluções dos problemas apresentados, com as conclusões a que o grupo chegou e com as decisões tomadas assim como as razões que as fundamentam.

Subtarefas / **Tarefa G4**	Cone, cilindro e esfera
Natureza de tarefa	Problemas
Conceitos	Cone, tronco de cone, esfera, cilindro, cilindro com um buraco, prisma
Processos	Medição, resolução de problemas, determinação de áreas e volumes, semelhança de triângulos
Competências gerais Matemática Ens. Básico	A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas; A tendência para procurar ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação.
Competências gerais e específicas da Geometria EB	A aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas com recurso a materiais manipuláveis; A aptidão para usar a visualização e o raciocínio espacial na resolução de problemas; O reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações.
Competências específicas da Geometria no 3ºCiclo	A compreensão do significado da forma de uma figura geométrica e o reconhecimento de relações entre elementos de figuras semelhantes; A aptidão para resolver problemas geométricos através de construções, nomeadamente, envolvendo igualdade e semelhança de triângulos assim como para justificar os processos.

Tabela 5.9: Características da tarefa G4 do subtema de geometria no espaço

O instrumento de avaliação a recolher era a ficha devidamente preenchida e elaborada por grupo, com base na actividade resultante da resolução da tarefa proposta. Este instrumentos de avaliação deveria ser recolhido pela professora investigadora durante a aula para posteriormente ser devolvido aos grupos com *feedback* onde constassem menções qualitativas correspondentes às apreciações do trabalho realizado (produto final e processo).

A professora deveria fazer a correcção da tarefa com toda a turma sistematizando os aspectos mais importantes, chamando a atenção para as conclusões fundamentais e para a precisão dos conceitos envolvidos na realização da tarefa.

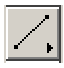
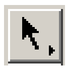
As competências que se pretenderam desenvolver com a Tarefa G4 para a aprendizagem da geometria são as que encontram descritas na Tabela 5.9.

5.4.3.5 Tarefa G5: Lugares Geométricos

Assunto: resolução de problemas, investigação sobre **Quadriláteros e pontos médios** com o *Geometers Sketchpad* (GSP).

Tarefa G5

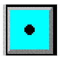
Vamos construir um quadrilátero qualquer. Identifica o ponto médio de cada um dos lados e em seguida, unir os pontos médios dos lados consecutivos. Para isso:

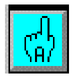
1. Constrói um quadrilátero usando .
2. Nomeia os vértices A, B, C e D do quadrilátero, clica  e seguidamente em cada um dos vértices.
3. Clica em  e selecciona [AB] e assinala o seu ponto médio, escolhe ***Midpoint*** no menu ***Construct.***
4. Repete o processo para [BC], [CD] e [DA].
5. Selecciona cada um dos pontos assim obtidos e no menu ***Construct*** escolhe ***segment***.
6. Que tipo de quadrilátero obtiveste?
7. Altera a forma do quadrilátero, selecciona e move um dos seus vértices A, B, C ou D. Regista as tuas observações e tenta explicar o que acontece.
8. Investiga o que se passa se o quadrilátero de partida for um quadrado, um paralelogramo, um losango, …
9. Procura estabelecer relações entre o quadrilátero que obténs e o de partida. Estuda o que se passa com um quadrilátero qualquer. Escreve as tuas conjecturas e justifica-as.

Adaptado do Projecto ***Investiga &Partilha*** -APM

Informações

Seleccionar mais do que um objecto - seleccionar o primeiro, pressionar a tecla de maiúsculas e depois seleccionar os outros.

Criar pontos - seleccionar o ponto em  e fazer um *clik* no local do ecrã onde queremos o ponto.

Mostrar ou esconder os nomes de pontos - seleccionar  e fazer um *clik* no nome ou no objecto, escrever o novo nome, fazer ***OK***.

Construir um segmento dados dois pontos - marcar dois pontos, seleccionar os pontos, no menu ***Construct*** escolher ***Segment.***

Construir o ponto médio de um segmento – seleccionar o segmento, no menu ***Construct*** escolher ***Point at Midpoint***.

Medir o comprimento de um segmento – seleccionar o segmento, no menu ***Measure*** e escolher ***Length.***

Medir a amplitude de um ângulo - seleccionar três pontos em que o do meio é o vértice do ângulo, no menu ***Measure*** e escolher ***Angle.***

Medir a área e o perímetro de um polígono - seleccionar os vértices do polígono, no menu ***Construct*** escolher ***Polygon interior.*** Depois com o interior ainda seleccionado, no menu ***Measure*** escolher ***Area*** ou ***Perimeter***.

Fazer cálculos com medidas já obtidas - seleccionar as medidas, no menu ***Measure*** escolher ***Calculate***. Escrever o que se pretende calcular, usando os ***Values*** (onde estão as medidas seleccionadas) e as operações. No fim ***OK***.

Subtarefas / **Tarefa G5**	**Lugares geométricos**
Natureza de tarefa	Actividade de investigação com recurso ao *Geometer´s Sktechpad* (GSP)
Conceitos	Quadrilátero, ponto médio, paralelogramo, semelhança de figuras
Propriedades	Propriedades dos quadriláteros; definição
Processos	Conjecturar, demonstrar
Construção hipotético-dedutiva	Teorema (critérios de semelhança de triângulos) Conjectura Demonstração
Competências gerais Matemática Ens. Básico	O gosto e a confiança pessoal em realizar actividades intelectuais que envolvam raciocínio matemático; A compreensão de noções de conjectura, teorema e demonstração
Competências gerais e específicas da Geometria EB	A aptidão para realizar construções geométricas para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas com recurso a *software* geométrico. A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente.
Competências específicas da Geometria no 3ºCiclo	A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios. A tendência para procurar invariantes em figuras geométricas e para utilizar modelos geométricos na resolução de problemas geométricos.

Tabela 5.10: Características da tarefa G5 do subtema de geometria no espaço

O instrumento de avaliação a recolher era o relatório elaborado por grupo, com base na actividade resultante da resolução da tarefa proposta. O relatório deveria ser recolhido pela professora investigadora durante a aula para posteriormente ser devolvido aos grupos com *feedback* onde constassem menções qualitativas correspondentes às apreciações do trabalho realizado (produto final e processo).

A professora deveria fazer a correcção da tarefa com toda a turma sistematizando os aspectos mais importantes, chamando a atenção para as conclusões fundamentais e para a precisão dos conceitos envolvidos na realização da tarefa. Também deveria fazer no quadro, para toda a turma, a demonstração de uma das proposições/teoremas explicitando e reflectindo acerca da natureza do processo demonstrativo e da demonstração na disciplina de matemática.

As competências que se pretenderam desenvolver com a Tarefa G5 para a aprendizagem da geometria são as que encontram descritas na Tabela 5.10.

5.4.3.6 Tarefa G6: Referência à geometria como construção hipotético-dedutiva

Assunto: demonstração como processo fundamental na matemática.

Tarefa G6: Actividade 1 da página 116-117 do manual adoptado

Subtarefas / **Tarefa G6**	**Demonstração de um teorema ou propriedade geométrica**
Natureza de tarefa	Demonstração de um teorema e/ou de uma dada propriedade geométrica
Conceitos	Termos primitivos: ponto, recta e plano Axiomas e teoremas Hipótese, tese e demonstração
Propriedades	Critérios de paralelismo e de perpendicularidade
Processos	Identificar hipótese e tese Conjecturar, demonstrar
Construção hipotético-dedutiva	Teorema (critérios de paralelismo e perpendicularidade) Conjectura Demonstração
Competências gerais Matemática Ens. Básico	O gosto e a confiança pessoal em realizar actividades intelectuais que envolvam raciocínio matemático; A compreensão de noções de conjectura, teorema e demonstração
Competências gerais e específicas da Geometria EB	A aptidão para utilizar a visualização espacial e o raciocínio espacial e dedutivo na análise de situações e na resolução de problemas em geometria. A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente.
Competências específicas da Geometria no 3ºCiclo	A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios.

Tabela 5.11: Características da tarefa G6 do subtema de geometria no espaço

O instrumento de avaliação a recolher era o relatório elaborado por grupo, com base na actividade resultante da resolução da tarefa proposta. O relatório deveria ser recolhido pela professora investigadora durante a aula para posteriormente ser devolvido aos grupos com *feedback* onde constassem menções qualitativas correspondentes às apreciações do trabalho realizado (produto final e processo).

A professora deveria fazer a correcção da tarefa com toda a turma sistematizando os aspectos mais importantes, chamando a atenção para as conclusões fundamentais e para a precisão dos conceitos envolvidos na realização da tarefa. Também deveria fazer no quadro, para toda a turma, a demonstração de uma das proposições/teoremas explicitando e reflectindo acerca da natureza do processo demonstrativo e da demonstração na disciplina de matemática.

As competências que se pretenderam desenvolver com a Tarefa G6 para a aprendizagem da geometria são as que encontram descritas na Tabela 5.11.

5.4.4 As rotações e o trabalho de projecto

As rotações foram pensadas para serem abordadas, aprofundadas e trabalhadas no formato de trabalho de projecto em grupo. A experiência matemática proporcionada também se faz através do desenvolvimento de trabalhos de projecto. A metodologia de trabalho de projecto permite que os alunos: possam tomar decisões negociadas, ser criativos e autónomos; experimentem trabalhos de média duração. Devido às exigências de um trabalho de projecto (de tempo, de metodologia e de produtos realizados) só poderia ser desenvolvido um projecto no 9º ano de escolaridade e foi decidido no grupo disciplinar de Matemática da Escola A que seria no subtema da Geometria, as Rotações, por ser mais propício a este tipo de abordagem e por permitir elaborar cartazes, que facilitariam a comunicação com a restante comunidade educativa numa exposição a realizar na "Dia da Matemática e da Informática", no início do 3º período. A forma escrita como foi apresentada aos alunos foi a seguinte:

TRABALHO DE PROJECTO: AS ROTAÇÕES ESTÃO EM TODA A PARTE

Com este trabalho de projecto pretende-se estudar as rotações a partir da recolha de imagens do meio envolvente.

Os subtemas a escolher poderão ser: as calçadas; os monumentos; as casas; os tapetes (de Arraiolos, ...); as pavimentações de Escher; frisos decorativos; azulejaria.

O estudo pormenorizado das rotações far-se-á recorrendo ao manual adoptado e a fontes bibliográficas existentes na biblioteca e na *Internet* (acesso através dos computadores na biblioteca).

Fases do Trabalho

- 1ª Fase - Organizar um portefólio com pelo menos 12 registos - 3 por cada elemento do grupo (fotocópias, fotografias, recortes de revistas, …);
- 2ª Fase - Seleccionar 4 a 6 registos por grupo onde se evidencie a ou as rotações patentes no registo;
- 3ª Fase – apresentar o trabalho de grupo em forma de um cartaz com os 4 registos mais bem conseguidos em termos de imagem e em termos das rotações a serem estudadas em Matemática;

As etapas devem ser, sequencialmente, as seguintes:

Escolher o tema a tratar.

Procurar monumentos, calçadas, fachadas de prédios, tecidos, tapetes, postais, exemplos de composições que possam ser interpretadas por meio de rotações (sempre que possível da região de Vila Real), individualmente ou em grupo, em livros e outras fontes, segundo o tema escolhido.

Registar, fotografar, fotocopiar ou desenhar as figuras/imagens seleccionadas.

Registar e referir a bibliografia e/ou referências bibliográficas consultadas, incluindo sites da *internet* (apresentar no verso do cartaz).

- **Data limite da entrega do trabalho**: 7 de Abril de 2005
- Apresentação pública do trabalho na turma no início do 3º Período.

  Cada grupo disporá de 5 a 10 minutos para realizar a apresentação do trabalho na turma.

  Todos os elementos do grupo terão de ser intervenientes nessa apresentação.
- Os melhores trabalhos serão expostos no Dia da Matemática, na 2ª semana do 3º Período, na *passerelle*[14].
- **Este trabalho será um dos elementos de avaliação do 3º Período**.

---

[13] O trabalho deve ser apresentado em formato de cartaz onde se identifique o tema escolhido e o grupo autor assim como a turma de 9º Ano a que pertencem.

[14] A *passarelle* é um espaço físico da Escola A onde se costumam realizar exposições de trabalhos.

O trabalho de projecto seria desenvolvido ao longo do 2º período e apresentado no início do 3º período.

Subtarefas / **Trabalho de projecto**	**Trabalho de projecto**
Natureza de tarefa/tipo de competências a desenvolver	Trabalho de projecto
Conceitos	Rotações Transformações geométricas: isometrias
Propriedades	Propriedades das rotações como transformações geométricas
Processos	Observação Identificação Representação gráfica na figura dos elementos identificativos da rotação Comunicação
Competências gerais Matemática Ens. Básico	O gosto e a confiança pessoal em realizar trabalho de projecto em matemática. A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação. A tendência para procurar ver e apreciar a estrutura abstracta em situações da vida real do dia-a-dia, na natureza ou na arte que envolva elementos geométricos.
Competências gerais e específicas da Geometria EB	A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente. A sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação
Competências específicas da Geometria no 3ºCiclo	A predisposição para identificar transformações geométricas e a sensibilidade para relacionar a geometria com a arte e a técnica A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras e justificar os seus raciocínios.

Tabela 5.12: Características do trabalho de projecto sobre rotações

Os instrumentos de avaliação a recolher eram o cartaz e o portefólio elaborados por grupo, com base na actividade resultante do trabalho de projecto. O cartaz deveria ser apresentado oralmente à turma após ter estado presente na exposição de trabalhos da actividade "Dia da Matemática e da Informática". O cartaz e o portefólio deveriam ser avaliados, de forma qualitativa através de menções qualitativas correspondentes às apreciações do trabalho realizado (produto final e processo).

A professora deveria fazer, com toda a turma, a sistematização dos aspectos mais importantes, chamando a atenção para as conclusões fundamentais e para a precisão dos conceitos envolvidos na realização da tarefa. Também deveria organizar e dinamizar, em conjunto com os restantes professores do grupo de Matemática do 9º Ano, da Escola A, a exposição de cartazes e portefólios resultantes do trabalho de projecto de todos os alunos de 9º Ano.

As competências que se pretenderam desenvolver com o trabalho de projecto para a aprendizagem da geometria são as que encontram descritas na Tabela 5.12.

5.5 Apresentação dos instrumentos de recolha de dados

A informação recolhida foi centrada no currículo (nos diferentes tipos de currículo) (Gimeno-Sacristán, 2000), nas competências essenciais a desenvolver no ensino da geometria e na pessoa do professor e sua *mediação* (Lopes, 2004). Relativamente à experiência matemática proporcionada aos alunos foram recolhidos:

i. dados do planeamento da experiência matemática a proporcionar;
ii. as planificações das tarefas reformuladas;
iii. o diário de bordo do trabalho realizado nas turmas;
iv. a Listagem Dinâmica de Perguntas que foi recolhida nas 1ª e 2ª semanas de Maio nas turmas da professora investigadora;
v. a avaliação da mediação realizada pelo professor recolhida através de um questionário, baseado e respeitante às percepções dos alunos, QEAME, de papel e lápis, preenchido pelos alunos na 2ª semana de Junho, nas turmas da professora investigadora e numa turma da *critical friend*;
vi. os sumários das aulas registados nos livros de ponto das turmas de 9º Ano da Escola A;
vii. a gravação áudio das conferências havidas entre a investigadora e a *critical friend*, professora B sobre a dinâmica das aulas e sobre o ensino da geometria,
viii. os incidentes críticos ocorridos nas aulas e reflexão sobre o ensino, ao longo do 3º período.

Relativamente à aprendizagem foram ainda recolhidas cópias dos registos das actividades realizadas nas turmas da professora investigadora a partir do proposto nas tarefas implementadas.

Relativamente às competências essenciais desenvolvidas implementaram-se o Pré-Teste e o Pós-Teste na 3ª semana de Maio e 2ª semana de Junho, respectivamente, a 5 das 6 turmas da Escola A: turmas A, B, D, E e F de 9º ano, da Escola A. De seguida explicitaremos e apresentaremos alguns instrumentos de recolha de dados.

5.5.1 QEAME – questionário acerca do ensino, da avaliação e do modo de estudar dos alunos (mediação)

Para avaliar a mediação realizada, na sala de aula, pelo professor, a partir das percepções dos alunos implementou-se um **questionário da Avaliação da Mediação, o QEAME** (ver anexo I). Este questionário foi implementado nas turmas da professora investigadora, turmas A, B e E, no final do ano lectivo 2004/2005, na 2ª semana de Junho e última do ano. Este questionário é constituído por duas partes. Enquanto a parte I tem por objectivo recolher as percepções dos alunos relativamente à pessoa do professor, ao ensino e à avaliação, a parte II centra-se em diferentes aspectos práticos do currículo em acção.

A parte I é constituída por questões adaptadas da primeira parte de um questionário usado por Cravino (2004), e designado de "Questionário acerca do ensino, da avaliação e do modo de estudar dos alunos", QEAME[15], no contexto do ensino superior. O objectivo desta parte do questionário "*é avaliar as percepções que os alunos formam do seu ambiente de aprendizagem na disciplina em análise, em particular relativamente ao ensino e à avaliação a que são submetidos*" (Cravino, 2004: 90). Mantiveram-se 22 questões de 29, com a numeração original, assim como as seis dimensões de análise usadas (Cravino, 2004: 90), a saber:

- I.1 Esforços deliberados do professor no sentido do bom ensino (questões 18, 20 e 26)
- I.2 Objectivos e padrões claros e bem definidos (questões 1, 13, 19 e 29)
- I.3 Organização e quantidade de trabalho (questões 4 e 14)
- I.4 Avaliação permanente (questões 7, 8, 12, 22 e 25)
- I.5 Interacção (questões 3, 5, 15, 17, 23 e 24)
- I.6 Estímulo à independência do aluno (questões 9 e 11)

[15] Na adaptação feita para o uso nesta intervenção didáctica excluíram-se as questões 2, 6, 10, 16, 21, 27 e 29 do original de Cravino, QEAME, por não se adequarem ao 3º Ciclo do Ensino Básico.

A parte II é constituída por 14 questões (numeradas de 30 a 43) das 16 questões originais, foi adaptada para implementação no 3º Ciclo da segunda parte do QEAME inteiramente desenvolvida por Cravino (2004). O objectivo desta parte é "*determinar o modo como os alunos percepcionam a organização da disciplina e os métodos de ensino utilizados bem como tentar avaliar o modo como os alunos estudam a disciplina em análise*" (Cravino, 2004: 91). Estão organizadas em 7 dimensões de análise do seguinte modo:

- II.1 A O professor distingue explicitamente entre conceitos, leis e regras (questão 32)
- II.2 Tipo de aulas e formato de trabalho (questão 30)
- II.3 Tipo de tarefas e variedade de recursos implicados (questões 33)
- II.4 Memorização intensiva versus compreensão na aprendizagem (questões 40 e 41)
- II.5 Ligação da matemática com a vida do dia-a-dia (questões 31, 36 e 39)
- II.6 Avaliação, instrumentos usados e explicitação dos critérios (questões 42 e 43)
- II.7 Estudo, estratégia e actividades usadas (questões 34, 35, 37 e 38

5.5.2 Pré-teste e pós-teste: competências em geometria

Os questionários construídos para a identificação das competências desenvolvidas em geometria foram o pré-teste e o pós-teste, que passaremos a designar de "Diagnóstico"(Anexo II) e de "Teste"(Anexo III), foram implementados na 3ª semana de Maio e na 2ª semana de Junho de 2005.

Cada questionário compreende uma primeira parte que tem por objectivo recolher os dados pessoais de identificação dos alunos relativamente ao sexo, idade e frequência de ano de escolaridade/turma nos cinco anos anteriores e a segunda parte é constituída por um conjunto de questões que têm por finalidade identificar as competências desenvolvidas no currículo de matemática no tema de geometria. Os instrumentos que vieram a ser administrados foram testes de "papel e lápis" que deveriam ser respondidos por cada aluno num máximo de 90 minutos. Nestes questionários usamos, sempre que possível, questões do PISA: a nossa preocupação era que os questionários tivessem questões já validadas por especialistas (internacionais e outros e aceites pelos representantes dos vários países membros da OCDE no *PISA Governing Board)*. As questões apresentadas incluíam itens de escolha múltipla e itens que requeriam dos alunos a produção de respostas, umas mais curtas e outras mais longas. Os itens estavam organizados em unidades baseadas num texto ou num gráfico ilustrando a situação concreta que se procurava que fosse tão próxima quanto possível de contextos reais (sem excluir as hipóteses de contextos artificiais ou virtuais) (Lange, 1999: 29).

5.5.2.1 Os questionários, os itens e sua codificação

Os questionários elaborados Pré-teste (Diagnóstico) e Pós-teste (Teste) contêm sobretudo questões respeitantes à área abrangente de espaço e forma uma vez que se pretendia avaliar competências no tema de geometria. Tivemos em consideração as constelações de competências definidas no estudo internacional do PISA (ME, 2004a) que se fundamentam no trabalho de Niss (2002) e de Lange (2002) e que passamos a enunciar: a constelação de reprodução, a constelação de conexão e a constelação de reflexão. O **pré-teste** foi implementado no início do mês de Maio e o **pós-teste** no início do mês de Junho, às turmas A, B, D, E e F do 9º Ano da escola A. As questões 1, 2, 3 e 4 são questões do PISA 2003 (ME, (2004a); ME, (2004b)) assim como as respectivas categorizações no que respeita às constelações de competências mobilizadas (reprodução, conexão e reflexão) e ao tipo de resposta (curta, fechada, aberta, escolha múltipla e múltipla complexa). As questões 5, 6, 7 e 8 foram trabalhadas em comum entre a professora investigadora e a *critical friend*, professora B, para que fossem considerados aspectos do raciocínio matemático tais como a generalização a partir da indução (6.4) e a demonstração – raciocínio demonstrativo e argumentação (8.2) para além de investir na visualização espacial a partir de outras questões e aspectos específicos correspondentes ao trabalho realizado. A questão 2 tem a ver com a ideia abrangente de mudança e relações, isto é, no tema de álgebra e funções do currículo do ensino básico no 3º ciclo ligando os gráficos de funções como representantes de modelos matemáticos associados a formas espaciais, conforme se pode analisar na Tabela 5.13.

	Categorização de acordo com a que foi usada no PISA					Análise dos conceitos e processos envolvidos	
Questão	**Constelação de competências/ Tipo de resposta (PISA)**	**Cotação Total**	**Cotação Parcial**	**Cotação nula**	**Critérios de codificação**	**Conceitos (considerando diversas estratégias de resolução)**	**Processos matemáticos envolvidos**
1. Dados de jogar	**CONEXÃO Resposta múltipla complexa**	4- acerta 4/4	3 - acerta 3 /4 2 - acerta 2 /4 1 - acerta 1 / 4	0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q012349	Faces; paralelismo; uso de relações	Visualização espacial; planificação mental
2. Reservatório de água	**REFLEXÃO Escolha múltipla**	1 - Resp B		0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q019	Gráficos; volumes; forma; funções; noção de crescimento; constância; crescimento linear; crescimento não linear	Interpretação e conexão de informação complexa;
2. Reservatório de água	**REFLEXÃO Resposta aberta**	4- acerta 4/4	3 - acerta 3 /4 2 - acerta 2 /4 1 - acerta 1 / 4	0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q012349	Gráficos; volumes; forma; funções; noção de crescimento; constância; crescimento linear; crescimento não linear	Interpretação e conexão de informação complexa; Raciocínio lógico e comunicação escrita de argumentos;
3. Carpinteiro	**CONEXÃO Resposta múltipla complexa**	4- acerta 4/4	3 - acerta 3 /4 2 - acerta 2 /4 1 - acerta 1 / 4	0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q012349	Perímetro; hipotenusa; catetos; Teorema de Pitágoras	Interpretação e conexão de informação complexa;
4.1. Construindo blocos	**REPRODUÇÃO Resposta fechada**	1 - 12 cubos		0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q019	Volume	Visualização espacial; Contagem; comparação com a unidade seleccionada
4.2. Construindo blocos	**REPRODUÇÃO Resposta fechada**	1 - 27 cubos		0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q019	Volume	Visualização espacial; Contagem; comparação com a unidade seleccionada
4.3. Construindo blocos	**CONEXÃO Resposta fechada**	1 - 26 cubos		0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q019	Volume	Visualização espacial; Raciocínio abstracto
4.4. Construindo blocos	**REFLEXÃO Resposta fechada**	1 - 96 cubos		0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q019	Volume	Construção (concreta ou mental); Visualização espacial; Raciocínio abstracto;
5. Iglo	REPRODUÇÃO Resposta aberta	2 - Volume entre 30 e 35	1 - Confusão entre r e d; volume entre 260 e 265	0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q0129	Volume: expressão do volume de uma esfera (semi-esfera)	Representação e definições padronizadas
6.1. Estruturas com fósforos	REPRODUÇÃO Resposta fechada	1 – desenho correcto da figura		0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q019	Sequência geométrica;	Visualização espacial; Localização de informação relevante
6.2. Estruturas com fósforos (a)	REPRODUÇÃO Resposta fechada	3 - A=5 quadrados; núm lados=6; perímetro=12 lados de quadrado	2 - acerta 2 / 3; 1 - acerta 1 / 3	0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q01239	Área; lado; perímetro	Escolha de unidades de medida de área e de comprimento; Medição
6.3. Estruturas com fósforos	CONEXÃO Resposta fechada	1 - Sim		0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q019	Planificação; Cubo;	Visualização espacial; planificação de

							um cubo;
6.4. Estruturas com fósforos	REFLEXÃO Resposta aberta em tabela	3 - acerta 3 / 3	2 - acerta 2 / 3; 1 - acerta 1 / 3	0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q01239	Interior	Generalização (por "indução"); Modelação matemática; Localização de informação relevante;
7. Cubos (4 respostas) (b)	REPRODUÇÃO Resposta aberta	para cada resposta correcta 1 -		0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q019	Paralelismo (no plano e no espaço); perpendicularidade (no plano e no espaço); Rectas; planos; complanaridade; Concorrência (no plano e no espaço)	Visualização espacial
8.1 Rectas e Planos	CONEXÃO Resposta curta	1 - Falso		0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q019	Perpendicularidade e paralelismo no espaço;	Visualização espacial; Raciocínio abstracto;
8.2 Rectas e Planos	REFLEXÃO Resposta aberta	2 - Identifica H e T e demonstra	1 - Identifica H e T	0-Outras respostas; 9-Sem resposta;	Q0129	Hipótese; Tese; Demonstração	Argumentação; Raciocínio abstracto;

Tabela 5.13: Categorização das questões usadas no pré-teste e pós-teste

Para categorizar as questões dos questionários seguiu-se a proposta referida em ME (2004a: 34): analisadas as exigências do item em questão procedeu-se à avaliação desse item e verificou-se qual das três constelações apresentava a descrição mais adequada às exigências desse item. Apresentam-se, de seguida, as questões devidamente codificadas segundo o tipo de resposta dos alunos: os códigos aparecem dentro do âmbito da categorização. A cotação total é atribuída sempre que se verifica a resposta completa e/ou a correcta; a cotação parcial e os respectivos códigos dependem das diferentes hipóteses de responderem de forma incompleta à questão apresentada; a cotação nula apresenta dois tipos de códigos diferentes: o código 0 correspondente a respostas não incluídas nas duas categorizações anteriores (cotação total e cotação parcial) e o código 9 correspondente a uma ausência de resposta. As questões do pré-teste e do pós-teste são questões que consideramos equivalentes quer no grau de dificuldade quer no tipo de competência/constelações de competências visadas e por isso, o modo de caracterização, os códigos usados e os critérios de correcção são os mesmos apresentando-se uma tabela de categorização única.

5.5.3 Listagem Dinâmica de Perguntas

No instrumento de recolha de dados, Listagem Dinâmica de Perguntas (Anexo IV) onde os alunos se identificavam, onde identificavam o tema matemático que estavam a tratar, as perguntas a que tinham de responder, de forma individual, eram:

1. O que aprendi?
2. O que me falta aprender? Formular sobre o que falta aprender.
3. Quais as minhas dificuldades?
4. Do que é que gostei mais? Porquê?
5. Do que é que gostei menos? Porquê?
6. Que ajuda espero da Professora?

Quais são as perguntas a que tenho de saber responder neste tema?

Este instrumento foi implementado aos alunos da professora investigadora e pressupunha que os alunos deveriam reflectir sobre as aprendizagens realizadas formulando perguntas sobre os conhecimentos matemáticos trabalhados e permitir que o professor, a partir da análise da listagem de perguntas, pudesse ajustar o trabalho na sala de aula às necessidades concretas dos alunos. Este instrumento foi administrado duas vezes, espaçadas de uma semana, na geometria, na 1ª e 2ª semana de Maio. Na segunda vez foi-lhes distribuído a folha que tinham preenchido e os alunos registaram as suas perguntas a uma cor diferente daquela com que tinham preenchido a primeira vez e, nessa cor datavam o seu registo. Com este documento o professor pode perceber como é que os alunos se posicionavam relativamente à dinâmica proporcionada no que se refere ao trabalho de grupo e às experiências de aprendizagem.

5.5.4 Diários de bordo

No fim das aulas era registado, num caderno por turma, o ambiente geral, a estrutura da aula (incluindo os timings), a forma como decorria a aula, os incidentes críticos, as dificuldades encontradas pelos alunos, o modo como os diferentes grupos trabalhavam na sala de aula e como os seus elementos se empenhavam ou não. Nem sempre estes registos foram realizados imediatamente a seguir à aula uma vez que havia aulas consecutivas no mesmo dia; quando assim acontecia os registos eram feitos logo que possível. Os registos realizados eram de dois tipos: descritivos (reconstrução de diálogos, descrição de comportamentos, de actividade, …) e reflexivos (ideias, surpresas, impressões, reflexões e dúvidas da investigadora).

Eis um extracto do diário de bordo relativo a uma aula de trabalho em grupos centrados na tarefa da página 84 do manual adoptado em que se descreve um incidente crítico que eclodiu na aula:

"[…] *Quando estava a apoiar os grupos (grupo do meio da sala) nas dúvidas que me colocavam apercebi-me que algo de estranho se estava a passar atrás de mim: estava a ouvir o grupo do Nuno Canadas quando me apercebi que no grupo do Nuno Pinto algo de anormal se estava a passar. Quando me voltei vi que o José Eduardo estava a apertar fisicamente o Nuno Pinto e vi-me na obrigação de os separar o que não foi tarefa fácil.*

Depois de os separar o José Eduardo disse que não trabalhava mais com ele (Nuno Pinto), que queria mudar de grupo. Tentei perceber o que se estava a passar… O Nuno Pinto ficou incomodado pela violência física de que tinha sido alvo mas tentou normalizar a situação mobilizando-se para o TG.[…]" No diário continuo a explicitar os contornos do incidente e quais as atitudes tomadas para centrar a atenção e energias dos alunos no foco do seu trabalho: a actividade matemática proposta através da tarefa.

No diário de bordo relativo à mesma aula questiono-me acerca das atitudes e decisões que tomei e de se elas foram adequadas:

"[…]*Será que tomei a atitude correcta em tentar mantê-los no mesmo grupo? Ou deveria refazer os grupos? Ou deveria mudar o José Eduardo?*

Ora a tensão no grupo aparece porque o grupo foi pressionado para trabalhar cooperativamente. Tenho estado a fazê-lo de forma explícita porque considero que os produtos finais dos grupos aparecem mas que a maior parte das vezes não corresponde a trabalho colaborativo de todos os seus elementos. […]Ora esta pressão (exercida por mim) tem-se traduzido em novas tensões dentro de cada grupo. Esta será a melhor forma de valorizar o trabalho colaborativo no grupo?"

Também registava a estrutura da aula tal como apresento de seguida:

"*10.00 – os alunos distribuíram-se em grupos para resolverem a Act.1 da pág.84 – tinham o tempo de ½ bloco. Antes de terminar o tempo (10 minutos), o grupo da Márcia já tinha terminado – Sugeri-lhes que fossem resolvendo os exercícios 9., 10. e 11.*

10.45 – Recolhi os relatórios e pedi aos alunos que retomassem os respectivos lugares. Comecei, então a sistematizar o trabalho realizado nos grupos [...]

11h30 – Enviei recados para os pais do Samuel e do Francisco e fiquei a falar com o grupo do Nuno Pinto."

5.5.5 Gravação áudio das "conferências" entre a investigadora e a *critical friend*, professora B

A *critical friend*, professora B, e a professora investigadora antes deste trabalho já mantinham uma relação de confiança que lhes permitia trabalharem em projectos comuns e partilhar visões, angústias e mesmo utopias acerca da educação e das práticas de sala de aula; assim, e neste contexto, a investigadora e a *critical friend*, professora B, relatavam, regularmente nas tardes de sábado, uma à outra os acontecimentos havidos na semana que findava pedindo esclarecimentos, questionando formas de fazer, opções tomadas e as respectivas razões – "**Conferências"**. Estas Conferências foram gravadas em formato áudio.

6. Descrição da gestão/abordagem curricular

O planeamento de uma determinada gestão curricular serve como primeira abordagem ao trabalho em que se quer investir com determinados objectivos, salvaguardando um conjunto de aprendizagens significativas. Os recursos diversificados e a avaliação formativa podem permitir aprendizagens diversificadas centradas nos alunos. Daí que haja necessidade de que os alunos estejam envolvidos nas aprendizagens possíveis proporcionadas por um conjunto de práticas de ensino. Nesta descrição da gestão curricular teremos como tópicos essenciais as tarefas tal como foram apresentadas aos alunos (6.1), a caracterização da avaliação formativa implementada em que o *feedback* teve especial relevo em todo o processo (6.2), a especificação do envolvimento dos alunos na sua aprendizagem (6.3) e o papel crucial que a *critical friend* teve no desenvolvimento da abordagem curricular em foco (6.4).

A abordagem curricular em foco centrou-se num trabalho de projecto realizado em 5 blocos no decurso do 2º período e concluído no início do 3º período e num conjunto de 7 tarefas implementadas no 3º período (a partir de 21 de Abril) em 13 blocos. Para além das tarefas a abordagem curricular também era constituída de resolução de exercícios, do treino de técnicas e procedimentos; a avaliação formativa também incluiu a realização de um teste a ser resolvido individualmente. No âmbito da investigação em curso, foi preciso implementar vários instrumentos para recolha de dados: testes para identificar o desenvolvimento de competências no tema da Geometria – o pré-teste ou Diagnóstico – Competências C_0 e o pós-teste ou Teste – Competências C_1 (consultar pp. 101-104), um questionário sobre a mediação realizada pelo professor, questionário acerca do ensino, da avaliação e do modo de estudar dos alunos – QEAME (consultar pp. 100-101), e a Listagem Dinâmica de Perguntas – LDP (consultar pp. 104-105). Na Tabela 6.1. apresenta-se a organização da experiência matemática com a respectiva calendarização especificando os sumários por aulas nas turmas de 9º A, 9º B e 9º E da Escola A (a análise dos dados, recolhidos através destes instrumentos, será a apresentada no capítulo 7).

Trabalho de projecto					
Aula	**Período**	**Sumários/blocos**	**9ºA**	**9ºB**	**9ºE**
Aula 1	2º Período	Lançamento do trabalho de projecto sobre rotações	07/03	04/01	02/03
Aula 2		Trabalho de grupo sobre "As rotações estão em toda a parte"	17/03	17/03	16/03
Aula 3	3º Período	Trabalho de projecto sobre rotações: reflexão sobre o trabalho desenvolvido e projecção do trabalho a desenvolver; ponto da situação.	04/04	05/04	06/04
Aula 4		Trabalho de projecto sobre "As rotações estão em toda a parte".	07/04	07/04	-----------
Aula 5		Recolha de cartazes e portefólios do trabalho de projecto "As rotações estão em toda a parte"	11/04	12/04	11/04

Aula	**Tarefa**	**Instrumento**	**Sumários/blocos**	**9ºA**	**9ºB**	**9ºE**
Aula 1	Tarefa 1		Razões trigonométricas do ângulo agudo – trabalho de grupo com entrega de relatório.	21/04	21/04	27/04
Aula 2	Tarefa 2		Relações entre razões trigonométricas - trabalho de Grupo com entrega de relatório.	28/04	26/04	02/05
Aula 3	Tarefa 3		Determinação de alturas de objectos inacessíveis: construção do astrolábio e medição de árvores – TG com entrega de relatório escrito.	02/05	28/04	04/05
Aula 4		LDP	Listagem Dinâmica de Perguntas. Ponto da situação da trigonometria: uso de tabela de valores naturais, uso das relações entre as razões trigonométricas.	05/05	03/05	09/05
Aula 5		LDP	Listagem Dinâmica de Perguntas. Construção de triângulos e determinação de medidas de ângulos e de lados dos mesmos.	09/05	05/05	11/05
Aula 6	Tarefa 4		TG com recurso ao *polydron* – modelos de prismas e pirâmides entrega de relatório escrito.	12/05	10/05	16/05
Aula 7			Teste	16/05	17/05	18/05
Aula 8		Competências - C_0	Teste diagnóstico acerca das competências matemáticas desenvolvidas no tema de geometria. Resolução de problemas em geometria.	19/05	19/05	23/05
Aula 9	Tarefa 5		Tronco de cone: construção com régua e compasso.	23/05	24/05	25/05
Aula 10	Tarefa 6		Paralelismo e perpendicularidade no plano e no espaço: critérios. Reflexão acerca do peso dos temas no exame.	30/05	31/05	30/05
Aula 11	Tarefa 7		Geometria como construção hipotético-dedutiva: TG com entrega de relatório. Hipótese, tese, teorema e demonstração.	02/06	02/06	01/06
Aula 12		Competências - C_1	Identificação das competências matemáticas desenvolvidas no tema de Geometria do 9º Ano. Entrega do teste e dos TG.	06/06	07/06	06/06
Aula 13		QEAME - Mediação	Auto avaliação. Avaliação do ensino, aprendizagem e trabalhos à disciplina. Resolução de problemas de exame.	09/06	09/06	08/06

LDP – Listagem Dinâmica de Perguntas **C_0** – Pré-Teste de competências **C_1** – Pós-Teste de competências **QEAME** – Questionário da avaliação da mediação (ensino, avaliação …

Tabela 6.1: Organização da experiência matemática em torno de tarefas (incluindo o trabalho de projecto) e no formato de trabalho de grupo (TG) com entrega de relatório

Em síntese, para além dos 5 blocos em que se desenvolveu o trabalho de projecto (2º e 3º período) em contexto de sala de aula, todas as turmas tiveram 13 blocos para a implementação da planificação realizada: numa das aulas os alunos realizaram um teste e nas outras, para além de preencherem a Listagem Dinâmica de Perguntas (num bloco – distribuído em duas aulas – 0,5 bloco por aula), o questionário de avaliação da mediação realizada pelo professor, QEAME (num bloco) e o questionário para avaliação das competências de geometria, pré-teste e o pós-teste (em 2 blocos – 1 bloco mais 1 bloco espaçados de 15 dias), trabalharam regularmente em grupo sobre tarefas diversificadas com produção de relatórios acerca do trabalho matemático realizado.

6.1 As aulas centradas em tarefas e no desenvolvimento de competências

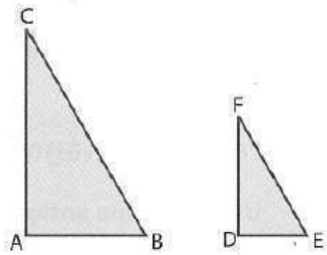
As aulas correspondem a tempo didácticos sob a responsabilidade do professor, são realizadas no contexto de turmas concretas e marcadas pela complexidade que lhes está inerente. Para apresentar as tarefas e a sua análise sob múltiplas perspectivas, vai ser usada uma escala de tempo de investigação intermédia, o meio bloco correspondendo a 45 minutos (Tiberghien & Buty, 2007) uma vez que a unidade de tempo definido para as aulas é um bloco de 90 minutos e que a dinâmica, por norma, se alterava a meio tempo. Neste item serão apresentadas as tarefas identificando, em primeiro lugar, as competências em desenvolvimento, o saber matemático e os conceitos/processos matemáticos mobilizados nas fases didácticas da tarefa; de seguida esclarecer-se-á qual o trabalho matemático a fazer, os diferentes papéis assumidos pelo professor, pelos pequenos grupos de alunos ou pelo grupo turma e pelos alunos de forma individual de acordo com o formato de trabalho preconizado e realizado tendo em atenção as fases didácticas das tarefas de acordo com a unidade de análise e a escala de tempo definida de meio bloco. Num terceiro momento e, ainda tendo em atenção as fases didácticas e a mesma escala de tempo, serão identificados os incidentes durante o desenrolar da aula, isto é, os momentos críticos onde ocorre alguma mudança ou quando alguma decisão é tomada quer pelo professor quer pelo aluno (Mason, 2002: 175). O foco da atenção estará no professor, alunos ou estrutura das ideias, na tensão existente entre cada par dos elementos referidos anteriormente, nas interacções entre os três, na influência do ambiente e nas actividades nas quais alguns ou todos estão envolvidos (Mason, ibidem). No fim da apresentação da abordagem curricular de cada tarefa será apresentada uma síntese dos aspectos mais relevantes e de resultados obtidos.

6.1.1 Tarefa 1 – Trigonometria do triângulo rectângulo

A Tarefa 1 foi seleccionada do manual adoptado, página 80, e é apresentada como uma tarefa "*Para Descobrir*" o que significa nas explicações da organização do manual de que se trata "*de exercícios e actividades* [que permitam] *uma primeira abordagem intuitiva e informal das novas aprendizagens*".

PARA DESCOBRIR...

Actividade 1



1. Desenha e recorta dois triângulos não geometricamente iguais, [ABC] e [DEF], rectângulos em A e D, tais que $A\hat{B}C = D\hat{E}F = 60°$.
2. Os ângulos destes triângulos são geometricamente iguais? E os lados?
3. Os triângulos [ABC] e [DEF] são semelhantes? Porquê?
4. Indica, usando as letras da figura:
   a) a hipotenusa do triângulo [ABC]; b) a hipotenusa do triângulo [DEF];
   c) o cateto oposto ao ângulo ABC; d) o cateto oposto ao ângulo DEF;
   e) o cateto adjacente ao ângulo ABC; f) o cateto adjacente ao ângulo DEF.
5. Usando uma régua, mede os lados dos dois triângulos. Copia e completa:
   a) $\overline{AB} =$ ___ b) $\overline{BC} =$ ___ c) $\overline{AC} =$ ___
   d) $\overline{DE} =$ ___ e) $\overline{EF} =$ ___ f) $\overline{DF} =$ ___
6. Determina, relativamente ao triângulo [ABC], os valores das razões:
   $$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$
7. Determina, relativamente ao triângulo [DEF], os valores das razões:
   $$\frac{\overline{DF}}{\overline{EF}} \qquad \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} \qquad \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}$$
8. Compara os resultados obtidos em 6. e 7. Que observas?
9. Compara-os também com os resultados obtidos pelos teus colegas que desenharam triângulos semelhantes mas com diferentes medidas dos comprimentos dos lados.
10. Parece-te que o valor encontrado para cada quociente depende das medidas dos lados dos diferentes triângulos? Porquê? E dependerá dos ângulos? Porquê?

Figura 6.1: Tarefa 1 – Trigonometria do triângulo rectângulo

De facto, a Tarefa 1 permite a introdução de conhecimentos novos partindo de uma abordagem intuitiva às razões trigonométricas, com base em conhecimentos previamente adquiridos pelos alunos, como invariantes relacionados com determinado ângulo agudo num triângulo rectângulo: as razões trigonométricas de um ângulo agudo.

6.1.1.1. Conceitos, processos e competências matemáticas na Tarefa 1

Sistematizam-se na tabela seguinte, Tabela 6.2, os conceitos, processos e competências matemáticas mobilizadas na Tarefa 1 nas diferentes fases didácticas.

Tempo didáctico	**Tarefa 1- Trigonometria do triângulo rectângulo**	
Fase didáctica / ***formato de trabalho*** */***recursos necessários***	Conceitos/ Processos	Competências
9ºA – 21/04 **9ºB – 21/04** **9ºE – 27/04** **I FASE/** ***Grupos(3/4)*** espalhados pela sala de aula – trabalho centrado nos alunos **Tesoura, transferidor, régua e calculadora**	Construção de um triângulo rectângulo com um ângulo de 60º de amplitude, com recurso ao transferidor; Hipotenusa e cateto num triângulo rectângulo; Cateto oposto e cateto adjacente a um ângulo agudo; Medição de lados de triângulo e cálculo de razões; Identificação de regularidades e invariantes; Formulação de hipóteses sobre as regularidades observadas; Segmento de recta e comprimento de segmento de recta;	A aptidão para realizar construções geométricas; A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada às situações apresentadas; A aptidão para efectuar medições em situações diversas, bem como a compreensão do sistema métrico; O reconhecimento do significado de fórmulas e a sua utilização no cálculo das medidas de comprimentos em situações diversificadas.
II FASE/ ***Grupo turma*** Cada aluno deveria voltar para o seu lugar – trabalho centrado no professor	Dependência das razões trigonométricas apenas dos ângulos; Identificação num triângulo rectângulo, da hipotenusa e relativamente a um ângulo agudo, α, o cateto adjacente e o cateto oposto. Cálculo do senα, cosα e tgα como razões trigonométricas.	

Tabela 6.2: Tarefa 1 - Conceitos, processos e competências

6.1.1.2. Análise da experiência matemática proporcionada através da Tarefa 1

1 bloco	**Tarefa 1- Trigonometria do triângulo rectângulo**		
Tempo didáctico	**Actividade matemática a realizar de acordo com a tarefa de aprendizagem-avaliação…**	**Papel do Professor**	**Papel do grupo (3 a 4 alunos) / aluno (individualmente)**
1º ½ bloco I FASE ***Grupos*** (3 a 4 alunos)	Resolução da Tarefa 1 – “Actividade 1” do manual adoptado à excepção da questão 9. Construir e recortar 2 triângulos rectângulos em que um dos ângulos tem 60º de amplitude.	Organiza o trabalho em grupo na sala de aula -[os grupos] deviam estar distribuídos por toda a sala de forma a que tivessem espaço para trabalhar, sem se imiscuir no trabalho de outros e escolher o secretário; Para a aula do 9º E e para que os alunos pudessem construir triângulos rectângulos diferentes com ângulos de 60º a professora levou transferidores em número suficiente para todos os grupos já que para as aulas do 9ºA e do 9ºB não tinha levado e os alunos também não; Observa os grupos a realizar a actividade movimentando-se por toda a sala, colocando questões pertinentes, ajudando a desbloquear impasses e promovendo a recentração do grupo na tarefa proposta; Supervisiona o trabalho realizado por cada grupo e por todos os grupos; Recolhe os relatórios de grupo;	Escolha do secretário 21/04 - **9ºA** Não trazendo transferidor, os alunos não construíram triângulos rectângulos com um ângulo de 60º mas fizeram as medições dos lados das figuras dos triângulos do manual. 21/04 - **9ºB** Não trazendo transferidor (à excepção de um grupo, decalcaram as figuras do livro para a folha do relatório) à contra luz nos vidros das janelas da sala de aula e realizaram as medições dos lados das figuras decalcadas. 27/04 - **9ºE** Construção de triângulos rectângulos diferentes em que um dos ângulos agudos deveria ter 60º- cada grupo construiu os seus e resolveram a tarefa a partir das medidas dos triângulos rectângulos construídos.
2º ½ bloco II FASE ***Grupo turma***	Correcção da tarefa 1. Construção de uma tabela no quadro pronta a recolher as medições diferentes de cada grupo de trabalho; Resolução de todas as questões incluindo a questão 9 (comparação dos valores determinados pelos diferentes grupos). Apresentação das razões trigonométricas como invariantes e das designações respectivas. Resolução dos exercícios 1, 2 e 3 das pág. 81 e 82 do manual adoptado.	Recolhendo os valores das medições dispô-los numa tabela no quadro e a partir daí “institucionalizou” os novos conhecimentos das razões trigonométricas: -Procedeu-se a uma análise dos valores tabelados; -Verificou-se a invariância dos valores e indicação das designações das razões trigonométricas; -Sistematizou-se e corrigiu-se a actividade matemática realizada no 1º meio bloco e a questão 9 foi resolvida no grupo turma. Resolveram-se vários exercícios sobre razões trigonométricas.	INDIVIDUAL / grupo turma Os alunos retomaram os seus lugares na sala de aula em carteiras dois a dois e virados para o quadro. Todos ao alunos registaram nos respectivos cadernos diários, mesmo quem tinha sido secretário, a correcção da tarefa e a realização dos exercícios propostos e trabalhados.

Tabela 6.3: Tarefa 1 - Caracterização da experiência matemática proporcionada

6.1.1.3. Os incidentes nas fases didácticas da Tarefa 1

Apresentaremos os incidentes em duas grandes dimensões: os incidentes relacionados com a forma de trabalho na sala de aula (FT) e os incidentes relacionados mais especificamente com a actividade matemática em causa (AM).

1º ½ bloco I FASE /*Grupos(3/4)* centrado nos alunos

***Incidente 1 – Material de construção necessário para a aula* – AM$_1$**

A professora não tinha solicitado que os alunos das turmas A e B do 9º ano trouxessem transferidor e tesoura para a sala de aula. Os alunos das turmas A e B do 9º ano não trouxeram transferidor nem tesoura para a aula de Matemática. À falta de material a professora solicitou aos alunos do 9º B que decalcassem os triângulos do manual na folha do relatório pelo que não foi possível construírem ângulos de 60º e, consequentemente, também não construíram triângulos diferentes – limitaram-se a decalcar os que estavam no manual adoptado. No 9º B, só um dos grupos é que tinha o material necessário e, por isso, construíram triângulos diferentes. Os restantes grupos e, na sala em que estavam, decalcaram as figuras utilizando à contra-luz obtida através dos vidros das janelas. No 9ºA não decalcaram as figuras e limitaram-se a fazer as medições das figuras apresentadas no manual e efectuaram os cálculos solicitados.

Com os alunos da turma E do 9º ano a professora solicitou explicitamente na aula anterior que trouxessem transferidor e tesoura mas, em simultâneo, levou transferidores e tesouras para a sala de aula numa atitude preventiva e para que a tarefa não ficasse condicionada à falta de material. A actividade de construção de triângulos rectângulos Δ[ABC] e Δ[DEF], com um ângulo de amplitude de 60º só foi possível na turma do 9ºE em que havia material necessário (um transferidor) por grupo. Cada grupo desenhou dois triângulos rectângulos em que um dos ângulos teria 60º de amplitude. A marcação dos vértices teria de seguir o esquema existente no manual adoptado.

***Incidente 2 - Questionamento da metodologia/formato de trabalho de grupo* – FT$_1$**

Os alunos da turma E tentaram resistir ao Trabalho de Grupo (TG) – Questionamento da metodologia/formato de trabalho

A professora mediante a resistência apresentada pelos alunos do 9º E esclareceu a importância do trabalho de grupo no currículo e na sociedade referindo-se aos princípios do trabalho de grupo:

A importância tanto do produto como do processo no trabalho matemático;

A articulação e concomitância do trabalho individual e trabalho de grupo;

A possibilidade de se exercerem funções diferenciadas de forma rotativa;

A prioridade do trabalho de equipa sobre as preferências pessoais de cada um;

A rotatividade da função do secretário ligada à estratégia de melhoria da comunicação matemática escrita de cada aluno.

O trabalho de grupo não é muito vulgar em Matemática e quando há o compromisso de se entregar um relatório como produto desse trabalho é, ainda, mais exigente. Os alunos normalmente resistem à mudança. Com a metodologia de trabalho de grupo, em que o trabalho está centrado nos alunos, o professor consegue perceber quem trabalha e quem não trabalha; quais são os grupos que estão realizar a actividade matemática de forma interessada, a despachar ou, mesmo, a brincar. Com a exigência da entrega de relatório ao fim de meio bloco os alunos têm mesmo de trabalhar.

O questionamento dos alunos foi realizado para ver se era possível não serem submetidos ao trabalho de grupo.

Quanto aos incidentes relativos à dinâmica de trabalho de grupo foram esclarecidas as razões da necessidade desse tipo de trabalho tanto em conformidade com o que era preconizado no currículo como com as suas razões sociais; de seguida enumerar-lhes as vantagens específicas do trabalho de grupo em Matemática que não poderiam ser obtidas através do trabalho individual na sala de aula como forma de argumentação da importância e pertinência do trabalho de grupo.

***Incidente 3 - Problematização da função de secretário* – FT$_2$**

A função de secretário e a regra da rotatividade implementada foram problematizadas pelos alunos. Num secretário de um grupo de matemática não era estritamente essencial ter-se a letra “bonita” mas que tivesse a oportunidade de melhorar a sua comunicação escrita a Matemática mesmo que ajudado pelos outros elementos de equipa.

Cabia ao grupo a gestão e o controle do trabalho a realizar. A professora supervisionava a dinâmica do trabalho de grupo/tempo fazendo chamadas de atenção para que os grupos se recentrassem na tarefa proposta, colocando questões pertinentes e ajudando a ultrapassar algum impasse com que os grupos se deparassem.

Quanto ao secretário, os alunos que tinham mais dificuldade em escrever ou os que se queriam esquivar ao trabalho argumentavam com a razão de não saberem escrever tão bem mesmo que isso se referisse apenas à caligrafia: os alunos foram esclarecidos da necessidade de haver um secretário, dessa função ser rotativa e de quais os objectivos que estavam por detrás dessa decisão e que tinham a ver, essencialmente com a necessidade de se desenvolver em **todos** os alunos a comunicação matemática como um fim e não somente como um meio. De salientar que esta competência transversal estava a ser trabalhada, de forma gradual, desde o 7º ano de escolaridade ou desde o 8º ano com os alunos do 9º E.

2º ½ bloco II FASE/ *Grupo turma* - centrado no professor que está posicionado junto ao quadro

***Incidente 4 - Resistência à ordem pré-estabelecida/Resistência ao trabalho* – $\mathbf{FT_3}$**

A professora pediu que cada aluno retomasse o respectivo lugar na turma e ficasse sentado e virado para o quadro onde já tinha desenhado uma tabela, (durante a I FASE), pronta a recolher os dados de cada grupo das medições e cálculos realizados dos Δ[ABC] e Δ[DEF]

Na turma E, do 9º Ano os alunos ocuparam lugares diferentes dos habituais para poderem "conversar" contrariando a indicação dada pela professora e resistindo à dinâmica de trabalho na sala de aula.

Os alunos retomaram os seus lugares habituais perante a firmeza da professora. Manter as turmas de forma disciplinada e bem comportadas relativamente ao trabalho preconizado, de acordo com os objectivos definidos, é uma tarefa do professor de forma a que se consiga ter ambiente que promova as aprendizagens; a firmeza e coerência do professor devem promover esse ambiente mobilizando os alunos para o trabalho.

***Incidente 5 - Disparidade dos valores determinados* – $\mathbf{AM_2}$**

Quando se coligiam os valores determinados pelos diferentes grupos e se iam registando numa tabela desenhada no quadro para que todos os alunos tivessem acesso ao trabalho realizado constatou-se que os valores das razões trigonométricas de um grupo eram díspares das dos outros grupos: isto aconteceu num dos grupos que colocou resistências ao trabalho de grupo (o do Nuno Pinto e do Eduardo). A atitude que a professora tomou perante a disparidade dos valores determinados por esse grupo foi a de não os considerar e não os registar na tabela desenhada no quadro.

Na II fase didáctica, coligiram-se os valores a que cada grupo tinha chegado e pode-se perceber que, apesar de erros de construção, de cálculo e de medição, os valores calculados, por coluna colorida, eram muito semelhantes: a partir da constatação da regularidade dos valores aproximados pode-se registar os valores obtidos e dar-lhes as designações de **sen60º, cos60º** e **tg60º** (ver Tabela 6.4**).** Estes valores obtidos através das construções e cálculos realizados nos grupos não eram os valores rigorosos, existentes em tabelas oficiais. Os valores do grupo secretariado pelo Nuno Pinto, totalmente díspares dos tabelados, não foram considerados.

	sen60º		**cos60º**		**tg60º**		**Elementos do grupo.** (a sublinhado está identificado o secretário)
Grupo	AB/BC	DF/EF	AB/BC	DE/EF	AC/AB	DF/DE	
1	0.8	0.8	0.5	0.5	1.6	1.6	Carina, Rui, Yuan, Ana Cristina
2	0.87	0.88	0.5	0.5	1.74	1.7(6)	Francisco, Nuno Canadas, Samuel e Jorge (faltou)
3	0.8	0.(7)	0.6	0.(5)	1.45	1.4*	Ana Vieira, Joana Teixeira, João Pedro, Paulo; *valor mal calculado
4	0.82	0.86	0.58	0.51	1.4	1.(6)	Cláudia, Sofia, Marcos Tiago
5	0.8(6)	0.83	0.5	0.53	1.7(3)	1.56	Ana Sofia, Márcia, Vânia e Wang
6	0.86	0.85	0.52	0.51	1.7	1.7	Nuno Sampaio, Teresa e Pedro
7	Este grupo teve os valores todos trocados. Não foram considerados						Nuno Pinto, Patrícia, Cátia e José Eduardo

Tabela 6.4: Tabela construída no quadro da sala de aula com os valores de todos os grupos

A tabela apresentada na Tabela 6.4 foi preenchida com os valores determinados pelos grupos (ponto de convergência) e os alunos que secretariaram estão sublinhados. Esta tabela desenhada e completa no quadro da sala de aula constitui-se no ponto de partida para o trabalho matemático no grupo turma: introduziram-se, formalmente, as razões trigonométricas e a sua dependência unicamente do ângulo considerado. Os dois triângulos rectângulos, com um ângulo de amplitude de 60º, que livremente cada grupo tinha construído permitiam compreender que as razões trigonométricas só podiam depender do ângulo (de amplitude 60º) e não dos triângulos (que eram diferentes entre si). Este pormenor da construção é relevado não só pela construção em si e naquilo que didacticamente se pode aprender mas também pelo raciocínio e reflexão matemáticos que os alunos que as não fizeram poderiam ter lucrado. O facto de a professora ter sugerido aos alunos do 9º B que decalcassem os triângulos do manual para a folha do relatório teve a ver com a rendibilização da aula no que respeita ao trabalho de medição e de constatação da invariância das razões trigonométricas.

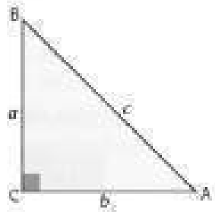
6.1.2 Tarefa 2 – Relações entre razões trigonométricas

A Tarefa 2 foi seleccionada do manual adoptado, página 84, e, tal como a Tarefa 1, é apresentada como uma tarefa "*Para Descobrir*".

PARA DESCOBRIR...

Actividade 1

Observa o seguinte triângulo, rectângulo em C.



1. Usando, sempre que for possível, as letras da figura, copia e completa:

a) $C\hat{A}B + C\hat{B}A =$ ___, logo $C\hat{B}A =$ ___ $- C\hat{A}B$ e os ângulos $\sphericalangle CAB$ e $\sphericalangle CBA$ são ___.

b) $\text{sen}\, C\hat{A}B =$ ___

c) $\cos C\hat{A}B =$ ___

d) $\text{tg}\, C\hat{A}B =$ ___

e) $\text{sen}\, C\hat{B}A =$ ___

f) $\cos C\hat{B}A =$ ___

2. Usando as relações da questão 1.:

2.1. A que é igual $(\text{sen}\, C\hat{A}B)^2 + (\cos C\hat{A}B)^2$?

E $(\text{sen}\, C\hat{B}A)^2 + (\cos C\hat{B}A)^2$?

2.2. Compara:

a) $\dfrac{\text{sen}\, C\hat{A}B}{\cos C\hat{A}B}$ com $\text{tg}\, C\hat{A}B$;

b) $\dfrac{\text{sen}\, C\hat{B}A}{\cos C\hat{B}A}$ com $\text{tg}\, C\hat{B}A$;

c) $\text{sen}\, C\hat{A}B$ com $\cos C\hat{B}A$;

d) $\cos C\hat{A}B$ com $\text{sen}\, C\hat{B}A$.

3. Copia e completa de modo a obteres afirmações verdadeiras:

a) $\text{sen}\,(90° - \alpha) = \cos$ ___

b) $\cos($___$) = \text{sen}\, \alpha$

Figura 6.2: Tarefa 2 – Relações entre razões trigonométricas

Esta tarefa permite a identificação de relações entre ângulos complementares a partir da identificação das regularidades e preparar e introduzir, de forma intuitiva, a demonstração da Relação Fundamental da Trigonometria.

6.1.2.1. Conceitos, processos e competências matemáticas na Tarefa 2

Sistematizam-se na tabela seguinte os conceitos, processos e competências matemáticas mobilizadas na Tarefa 2 nas diferentes fases didácticas.

<table>
<tr><td>Tempo didáctico</td><td colspan="2">Tarefa 2- Relações entre razões trigonométricas</td></tr>
<tr><td>Fase didáctica / formato de trabalho /recursos necessários</td><td>Conceitos/ Processos</td><td>Competências</td></tr>
<tr><td>9ºB – 26/04
9ºA – 28/04
9ºE – 02/05
I FASE/
Grupos(3/4) espalhados pela sala de aula – trabalho centrado nos alunos</td><td>Razões trigonométricas;
Ângulos complementares e suplementares;
Identificação de igualdades;
Escrita das igualdades em linguagem simbólica (matemática);
Generalização: 1) relação fundamental da trigonometria a partir de 2 ângulos do triângulo rectângulo desenhado; 2) tgα=senα/cosα; 3) sen(90º-α)=cosα; 4) cos(90º- α)=senα;</td><td rowspan="2">A predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica.
A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada às situações apresentadas;
O reconhecimento do significado de fórmulas e a sua utilização no cálculo de diferentes razões trigonométricas;
A compreensão das noções de teorema e demonstração.</td></tr>
<tr><td>II FASE/
Grupo turma
Cada aluno deveria voltar para o seu lugar – trabalho centrado no professor</td><td>Sistematização de todo o trabalho realizado no 1º ½ bloco com especial atenção para a análise das expressões obtidas, para a capacidade de relacionamento do que foi obtido e para a síntese, já na fase final;
Dedução matemática da relação tgα=senα/cosα;
Demonstração da relação fundamental da trigonometria: $sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$.</td></tr>
</table>

Tabela 6.5: Tarefa 2 - Conceitos, processos e competências

6.1.2.2. Análise da experiência matemática proporcionada através da Tarefa 2

1 bloco	**Tarefa 2- Relações entre razões trigonométricas**		
Tempo didáctico	**Actividade matemática a realizar de acordo com a tarefa de aprendizagem-avaliação…**	**Papel do Professor**	**Papel do grupo (3 a 4 alunos) / aluno (individualmente)**
1º ½ bloco	Resolução da "Actividade 1." da pág. 84 do manual adoptado: Desenhar o triângulo na folha de relatório; Cálculo de razões trigonométricas; Trabalho sobre a relação fundamental da trigonometria usando o teorema de Pitágoras; Comparação de expressões; Determinação de regularidades.	Escreve o sumário Organiza o trabalho na sala de aula: Trabalho em grupo 9ºE – Entrega o relatório da Tarefa 1 avaliado e anotado com *feedback* Supervisiona o trabalho realizado por cada grupo e por todos os grupos; Observa os grupos a realizar a actividade movimentando-se por toda a sala, colocando questões pertinentes, ajudando a desbloquear impasses e promovendo a recentração do grupo na tarefa proposta; Recolha dos relatórios de grupo	Escolha do secretário (diferente do da aula anterior) Desenho do $\Delta[ABC]$ na folha do relatório: o rigor e a atribuição das designações dos pontos eram fundamentais; resolução da tarefa proposta.
2º ½ bloco	Correcção da Tarefa 2. Identificação, definição e designação de ângulos complementares e suplementares; Sistematização do trabalho realizado nos grupos durante o 1º ½ bloco; Dedução matemática da relação $tg\alpha = sen\alpha / cos\alpha$; Demonstração da Relação fundamental da trigonometria: $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ Resolução dos exercícios 9 e 10 da pág. 85 do manual adoptado: determinação do cosα e tgα, dado o senα.	9ºA, 9ºB, 9ºE -Sistematizou-se/corrigiu-se a actividade matemática realizada no 1º meio bloco, em trabalho de grupo. Supervisão de se os alunos estavam a acompanhar o trabalho realizado centrado na professora: Exigência de comportamento adequado e informação dos pais da postura dos filhos na sala de aula Resolveram-se vários exercícios sobre razões trigonométricas. 9ºE A professora registou, nos cadernos diários do Samuel e ao Francisco notas informativas relativas ao comportamento; Conversa privada com o grupo do José Eduardo, Nuno Pinto, Cátia e Patrícia no fim da aula.	INDIVIDUAL / grupo turma Os alunos retomaram os seus lugares na sala de aula em carteiras dois a dois e virados para o quadro. Todos registaram nos respectivos cadernos diários, mesmo quem realizou a função de secretário, a correcção da tarefa e a realização dos exercícios propostos e trabalhados.

Tabela 6.6: Tarefa 2 - Caracterização da experiência matemática proporcionada

6.1.2.3. Os incidentes nas fases didácticas da Tarefa 2

1º ½ bloco I FASE /*Grupos(3/4)* centrado nos alunos

***Incidente 6 - A função de secretário e a confiança num determinado elemento do grupo* – FT$_4$**

A Beatriz (na turma do 9º B) – problematiza a situação do Fábio poder ser secretário argumentando com a pouca legibilidade da sua letra. Perante esta intervenção a professora faz o esclarecimento acerca do trabalho de grupo e do respectivo relatório como produto final:

"*Respondi-lhe que estava habituada a ler a sua [do Fábio] letra e que isso não constituiria uma impossibilidade para mim. Depois, acrescentei, a mudança e rotatividade de secretário tinha a ver com a necessidade de escrita a matemática e não com letra ser ou não ser bonita. Por outro lado o grupo deveria aprender a confiar em todos os seus elementos como capazes dessa tarefa*" (in diário de turma), isto é:

- Da pouca importância da letra em relação à muita importância da mudança e rotatividade do secretário;
- Do objectivo da melhoria na comunicação matemática escrita de todos os elementos do grupo;
- Da necessária confiança a desenvolver pelo grupo em todos os seus elementos.

Confrontado pela expectativa da professora o Fábio assumiu [de forma tímida] e explicitou a sua falta de auto-confiança e auto-estima:

"*Oh professora, mas eu não confio em mim!*" (in diário de turma)

Em resposta a esta declaração do Fábio a professora declarou:

"*Ah! Mas eu confio em ti e sei que és capaz. Também sei que te vais esforçar para ter uma melhor apresentação e o grupo vai estar atento para perceber se tudo o que escreves é mesmo aquilo que o grupo quer que escrevas*" (in diário de turma)

A professora solicitou a todos os elementos do grupo que se esforçassem por participar e contribuir para o trabalho de grupo ajudando particularmente o Fábio a desempenhar eficazmente a função de secretário.

A função de secretário neste incidente era questionada por um dos elementos do grupo uma vez que não reconhecia competência matemática ao colega para a exercer com responsabilidade. A aluna que questionou argumentou com a letra pouco legível do colega.

A resposta dada pela professora, apesar de contra-argumentar com a pouca importância da legibilidade da letra que estava habituada a decifrar noutras circunstâncias, aproveitou para clarificar a necessidade de todos os alunos melhorarem a comunicação matemática escrita. A rotatividade da função de secretário era uma opção estratégica da professora na sala de aula para desenvolver, em todos os alunos, a comunicação matemática como um fim e para, sem dramas, todos os alunos perceberem que era esperado de cada um deles uma melhoria na competência da comunicação matemática escrita. Esta opção também permitia que a professora se focasse, em cada aula de trabalho de grupo na produção de relatório escrito, na forma de comunicação de um aluno por grupo constituídos. A professora aproveitou o incidente para explicitar a confiança que colocava no aluno a quem cabia a tarefa mesmo e apesar do aluno explicitar que ele não se sentia capaz de o fazer. A professora aproveitou, ainda, para solicitar a ajuda de todos os elementos do grupo no desempenho adequado dessa tarefa ao elemento em questão. O Fábio, o aluno em causa, investiu com muito esforço conseguiu fazer um bom trabalho de apresentação do relatório de trabalho com a ajuda do grupo.

Incidente 7 - Feedback escrito e oral relativo ao relatório e trabalho da aula anterior – AM$_3$

Na turma E do 9º ano a professora, no início da aula, entrega os relatórios de grupo onde estão registadas, por escrito, notas relativas ao trabalho desenvolvido (relatório e processo); dá *feedback* oral com especial incidência ao grupo do Nuno Pinto, do José Eduardo, da Cátia e da Patrícia e esclarecendo porque é que os dados recolhidos e os cálculos efectuados relativos à Tarefa 1 não convergiam com os do resto da turma, na aula anterior: o pouco rigor na construção do triângulo em que um dos seus ângulos tinha 60º de amplitude aliado à pouca atenção dada na atribuição da designação dos vértices do triângulo. Chama a atenção para a importância do contributo de todos os elementos do grupo para a realização de um bom trabalho e relatório a partir de um contributo deliberado de todos os seus elementos. Polariza-os para o trabalho responsável do grupo e de todos os seus elementos explicitando a expectativa, na presente aula, de que se concentrassem no trabalho a realizar perante a tarefa dada e que todos os elementos contribuíssem para um trabalho de qualidade. A entrega, no início da aula dos relatórios de grupo à turma E do 9º Ano onde estavam registadas, por escrito, notas relativas ao trabalho desenvolvido (relatório e processo) permitiu aos alunos posicionarem-se relativamente às expectativas colocadas pela professora nas tarefas distribuídas em contraposição com o trabalho realizado em grupo. A avaliação dos relatórios era qualitativa e apresentava juízos globalizantes relativamente ao produto final, relatório recolhido, mas também relativamente ao processo resultante da observação presencial da professora durante a aula; no caso de alguns grupos a professora dá *feedback* oral permitindo rendibilizar as suas intervenções específicas perante um determinado grupo para toda a turma: foi o que aconteceu com o *feedback* oral dado ao grupo do Nuno Pinto, do José Eduardo, da Cátia e da Patrícia chamando a atenção para a importância do trabalho de grupo em que todos os seus elementos se dedicam ao trabalho proposto através de uma dada tarefa em contraposição com o que se tinha passado na aula anterior no grupo em questão e que condicionou o respectivo desempenho que fez com que os dados relativos ao trabalho do grupo não tivessem sido considerados (falta de atenção e rigor na construção do triângulo e na atribuição das designações dos vértices do triângulo das tarefas propostas).

***Incidente 8 - Agressão física em plena sala de aula* – FT$_5$**

Agressão física entre José Eduardo e Nuno Pinto despoletada pela pressão/tensão para que realizassem cooperativamente o trabalho proposto no início da aula:
"*Então o Nuno Pinto esclareceu-me que o José Eduardo não estava a participar no trabalho de grupo e estava com os phones colocados; que o tinha chamado várias vezes à atenção e que ele não tinha ligado e que depois ele o tinha atacado*". O controlo da situação foi conseguido pelo afastamento/distanciamento físico do José Eduardo do grupo colocando-o em reflexão sobre o que se tinha passado. O grupo dos restantes três elementos continuou a realizar a tarefa proposta e a professora continuou a supervisionar o que se estava a passar. Tanto o José Eduardo como o Nuno Pinto solicitaram que o José Eduardo fosse retirado daquele grupo.

A agressão física entre José Eduardo e Nuno Pinto foi despoletada pela pressão/tensão para que realizassem cooperativamente o trabalho proposto no início da aula. Esta tensão transformada e expressada em violência física entre elementos do mesmo grupo pode ter a ver com a responsabilização que a professora fez sentir a cada grupo na sala de aula. A responsabilização pessoal de cada aluno inserido num determinado grupo mobiliza todos os seus elementos para a realização da actividade matemática proposta na tarefa. Assim, em cada grupo se gera a tensão/responsabilização pelo trabalho a desenvolver onde o relatório como produto permite que a professora, *a posteriori*, possa analisar/avaliar, de alguma forma, o trabalho desenvolvido pelo grupo. Este grupo tinha tido uma prestação menos boa na Tarefa 1 e o Nuno Pinto, pressionado pelo fraco desempenho anterior, estava a pressionar o José Eduardo para a colaboração na actividade em contraposição com a atitude desmotivada e alheia com que o segundo estava a realizar a Tarefa 2.

***Incidente 9 - Dificuldade na resolução de uma determinada questão da tarefa* – AM4**

Perante a dificuldade de resolução de uma dada questão, alguns grupos recorreram à leitura e interpretação da informação matemática escrita no manual: os grupos "admitiram" a "autoridade" do manual e recorrem a ela para realizarem a questão onde sentiram dificuldades.

Perante a dificuldade de resolução de uma dada questão alguns grupos recorreram à leitura e interpretação da informação matemática escrita no manual. Mais do que os grupos admitirem e reconhecerem a "autoridade" do manual e recorreram a ela para realizarem a questão onde sentiram dificuldades: os alunos mobilizaram a leitura e interpretação da informação do manual para poderem responder a uma questão solicitada.

Este incidente é avaliado como uma mais valia na formação dos alunos que recorreram a ele. No entanto vê-se como fundamental que haja investimento na compreensão dessa informação coisa que um dos grupos não conseguiu fazer.

2º ½ bloco II FASE /*Grupo turma* - centrado no professor

***Incidente 10 – Informação do comportamento dos alunos aos pais* – FT6**

A professora registou, nos cadernos diários do Samuel e do Francisco (9º E) notas informativas relativas ao comportamento, dos dois alunos em causa, para serem dadas a conhecer aos pais e encarregados de educação: deveriam trazer as notas devidamente assinadas.

***Incidente 11 – Remediação do incidente de violência e compromisso* – FT$_7$**

Conversa privada com o grupo do José Eduardo, Nuno Pinto, da Cátia e da Patrícia, no fim da aula para esclarecer o que de facto se tinha passado numa sequência racional e lógica. Identificada a sequência dos acontecimentos cada aluno pediu desculpa/aceitou desculpas. A professora explicitou características específicas do José Eduardo que lhe traziam dificuldades acrescidas num ambiente de sala de aula e solicitou ao José Eduardo e aos restantes elementos de grupo para além da atenção e da compreensão para o facto disponibilidade e boa-vontade para investirem no trabalho naquele grupo. Formulando a pergunta a cada um dos elementos do grupo todos se disponibilizaram para adequarem o respectivo comportamento e investirem no trabalho na disciplina de matemática naquele grupo.

6.1.3 Tarefa 3 – Medição de objectos inacessíveis com o astrolábio

A Tarefa 3 foi seleccionada do manual adoptado, páginas 92-93, e é apresentada como uma tarefa "*Para Investigar*". Nas explicações da organização do manual as tarefas do "*Para Investigar*" são propostas no final de cada unidade fomentando "*um conjunto de actividades de investigação com o objectivo de permitir desenvolver atitudes e valores positivos relativamente à [Matemática]: da História da Matemática à aplicação da Matemática na tecnologia e nas técnicas, passando pela relação da Matemática com outras ciências ou com actividades do dia-a-dia*".

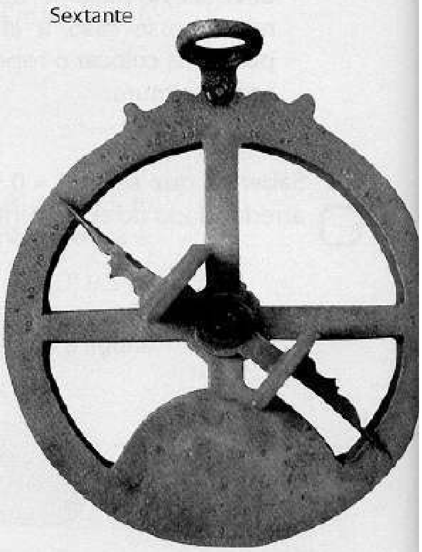
Sextante

O astrolábio

Experiência, intuição e a observação dos céus, para uma estimativa da latitude, constituíram a base da navegação até finais do séc. XV, quando as viagens dos portugueses criaram a necessidade de instrumentos para o cálculo rigoroso da latitude. Como a altura do Sol ou da Estrela Polar acima do horizonte varia com a latitude, esta pode ser medida pelo ângulo entre o horizonte e o corpo celeste, princípio que veio a ser aperfeiçoado por instrumentos dotados de miras e escalas cada vez mais apuradas.

Originalmente, o **astrolábio** era utilizado em terra para calcular a elevação de um corpo celeste relativamente ao horizonte e assim determinar a hora do dia. Nos séculos XV e XVI fizeram-se versões simplificadas para determinar a latitude no mar: alinhava-se a Estrela Polar com duas miras e lia-se numa escala de transferidor a sua elevação acima do horizonte.

As grandes realizações do génio humano,
Selecções do Reader's Digest, 1997



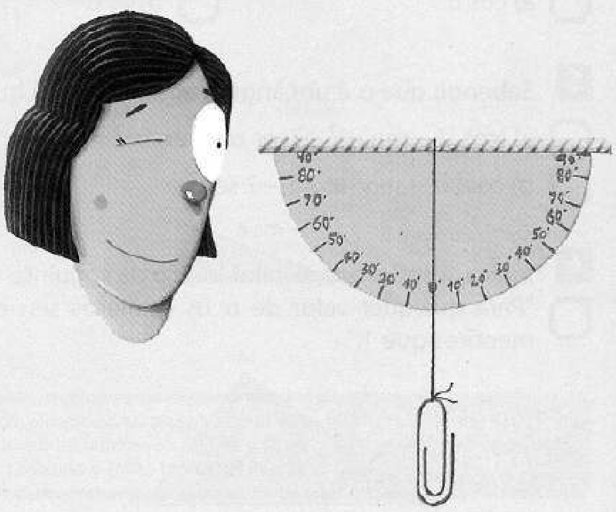
Astrolábio

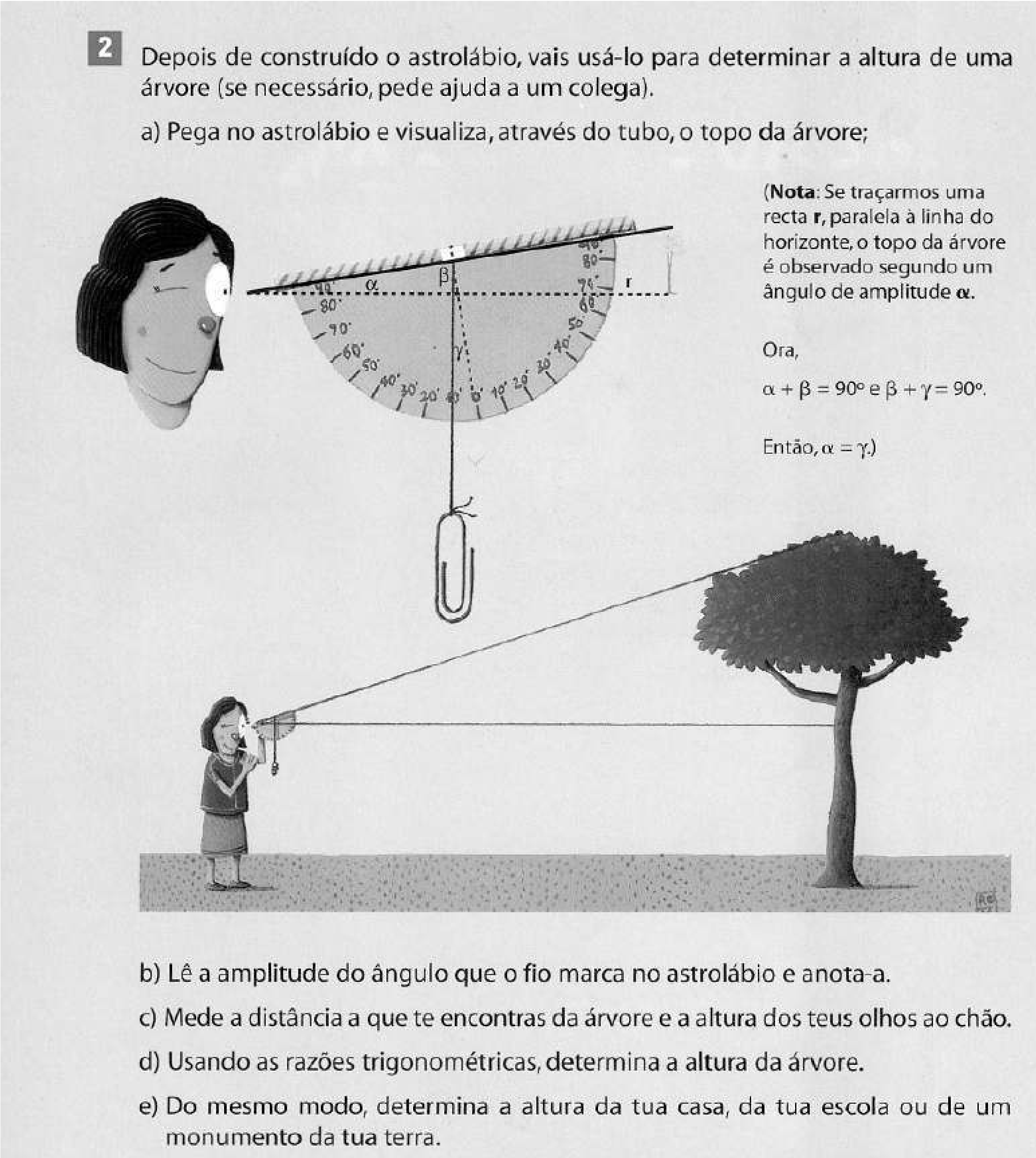
1 Constrói um astrolábio usando um semicírculo em cartão, uma palhinha, um cordão, um clipe e fita-cola.

a) Gradua o semicírculo, em graus, de 10° em 10°, de 0° a 90°, como mostra a figura.

b) Cola, com a fita-cola, a palhinha por cima do semicírculo graduado.

c) No centro do círculo que deu origem ao semicírculo, prende verticalmente, com fita-cola, uma das extremidades do cordão e na outra extremidade amarra o clipe.





2 Depois de construído o astrolábio, vais usá-lo para determinar a altura de uma árvore (se necessário, pede ajuda a um colega).

a) Pega no astrolábio e visualiza, através do tubo, o topo da árvore;

(**Nota**: Se traçarmos uma recta **r**, paralela à linha do horizonte, o topo da árvore é observado segundo um ângulo de amplitude $\boldsymbol{\alpha}$.

Ora,

$\alpha + \beta = 90º$ e $\beta + \gamma = 90º$.

Então, $\alpha = \gamma$.)

b) Lê a amplitude do ângulo que o fio marca no astrolábio e anota-a.

c) Mede a distância a que te encontras da árvore e a altura dos teus olhos ao chão.

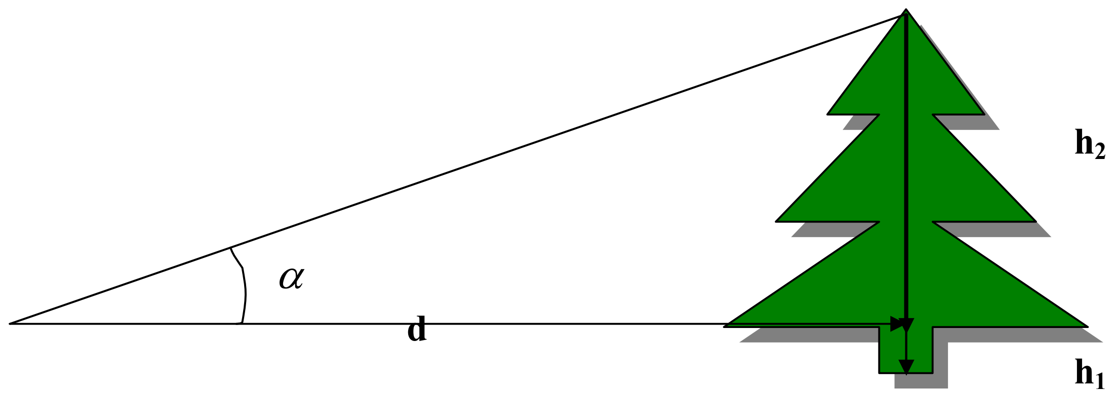
d) Usando as razões trigonométricas, determina a altura da árvore.

e) Do mesmo modo, determina a altura da tua casa, da tua escola ou de um monumento da tua terra.

Figura 6.3: Tarefa 3 – Medição de objectos inacessíveis

A ficha no formato que se apresenta na Figura 6.4 foi preparada para se registarem as medições efectuadas por aluno no grupo e identificando o objecto seleccionado/atribuído. A ficha também era orientadora do trabalho a realizar uma vez que identificava a distância do aluno até ao objecto a medir, d; identificava a altura a que os olhos de cada aluno ficava do chão, h_1 e a altura do objecto a medir desde os olhos do observador até ao ponto mais alto do objecto seleccionado, h_2. A altura do objecto seria obtida pela soma das parcelas h_1 e h_2 e seria designado de h. Naturalmente cada aluno obteria valores diferentes fruto do rigor das medições efectuadas e da distância d, a que se colocava do objecto seleccionado. A ficha estava preparada para que os alunos pudessem problematizar qual seria a medição a seleccionar e qual o critério que utilizariam para essa escolha. Os alunos, nos grupos, eram orientados para o cálculo das médias dos valores encontrados face a ausência de outros critérios.

Objecto ______________________________



Alunos	**h_1** altura dos olhos até ao chão	**d** Distância do aluno ao objecto – na horizontal	α Amplitude do ângulo α	**h_2** altura do objecto até aos olhos do observador	**$h = h_1 + h_2$** altura total do objecto
				Média	

Figura 6.4: Tarefa 3 - Ficha de registo

Na ficha do trabalho de grupo havia espaço livre para o registo dos cálculos relativos aos dados de cada aluno, para o cálculo da média dos valores determinados, para os resultados, para as conclusões e considerações finais acerca do trabalho efectuado.

6.1.3.1. Conceitos, processos e competências matemáticas na Tarefa 3

Sistematizam-se na tabela seguinte, Tabela 6.7, os conceitos, processos e competências matemáticas mobilizadas na Tarefa 3 nas diferentes fases didácticas.

<table>
<tr><th rowspan="2">Fase didáctica / formato de trabalho /recursos necessários</th><th colspan="2">Tarefa 3 - Medição de objectos inacessíveis</th></tr>
<tr><th>Conceitos/ Processos</th><th>Competências</th></tr>
<tr><td>9ºB – 28/04
9ºA – 02/05
9ºE – 04/05
I FASE/
Grupos(3/4)
espalhados pela sala de aula – trabalho centrado nos alunos
II FASE/
Grupos(3/4)
– trabalho centrado nos alunos</td><td>Construção do astrolábio
•Desenho de um semi-círculo na base de cartolina de forma rectangular;
•Graduação do semi-círculo desenhado, de 10º em 10º com recurso a um transferidor; “transposição” das marcas para a fronteira do semi-círculo a partir da ligação das marcas de graduação do centro do semi-círculo às marcas anteriormente referidas;
•Colocação/colagem da palhinha sobre o diâmetro do semi-círculo para permitir a visualização;
•Colocação correcta do pêndulo com recurso a um clipe preso por um fio atado no centro do semi-círculo;

Medição, com fita métrica, da altura de cada um dos alunos até à altura dos olhos, dentro da sala de aula; Registo das alturas dos alunos na folha de papel/guião de registo de relatório, previamente preparado;</td><td rowspan="2">A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada às situações apresentadas;
A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou o astrolábio construído;
A sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real;
A aptidão para efectuar medições em situações diversas e efectuar estimativas, bem como a compreensão do sistema métrico;
O reconhecimento do significado de fórmulas e a sua utilização no cálculo das medidas de comprimentos em situações diversificadas incluindo o de objectos inacessíveis;
A sensibilidade para relacionar a Geometria com a técnica (astrolábio).</td></tr>
<tr><td>Cada grupo deveria dirigir-se para o pátio da Escola e efectuar as medições de d e α de um objecto de altura inacessível seleccionado – trabalho centrado nos alunos
III FASE/
Grupos(3/4)
– trabalho centrado nos alunos

IV FASE/
Grupo turma
trabalho centrado na professora</td><td>Recolha de dados: d e α.
Medição da altura do objecto seleccionado na entrada da Escola;
Medição do ângulo, α, com recurso ao astrolábio construído;
Medição da distância, d, com a fita métrica, de cada aluno até ao objecto seleccionado;

Uso da tgα e de d para determinar h_2, para cada aluno do grupo;
Uso das tabelas trigonométricas;
Cálculo da média dos valores calculados pelos elementos do grupo;
Desvios para a média;
Reflexão acerca da razoabilidade do valor encontrado;
Semelhança de triângulos;
Utilidade do astrolábio na História e na actualidade.

Sistematização de todo o trabalho realizado com especial atenção para a análise das expressões obtidas, para a capacidade de relacionamento do que foi obtido e para a síntese, já na fase final.</td></tr>
</table>

Tabela 6.7: Tarefa 3 - Conceitos, processos e competências

6.1.3.2. Análise da experiência matemática proporcionada através da Tarefa 3

1 bloco	**Tarefa 3 - Medição de objectos inacessíveis**		
Tempo didáctico	**Actividade matemática a realizar de acordo com a tarefa de aprendizagem-avaliação…**	**Papel da Professora assessorada pela coordenadora do grupo de Matemática** Nestas aulas a coordenadora do grupo de Matemática disponibilizou-se para trabalhar na sala de aula com a professora da turma e investigadora.	**Papel do grupo (3 a 4 alunos)**
1º ½ bloco	**FASE I – Construção do astrolábio** Desenho do semi-círculo Graduação do semi-círculo com o transferidor e de acordo com a figura do manual; Furar a palhinha com a ponta do clip; Introduzir o fio na palhinha furada com a ponta do clip; Dar o nó no fio e na extremidade oposta amarrar o clip; Depois de recortar o semi-círculo, colar a palhinha sobre a graduação de 90º e de tal forma que o buraco da palhinha se situe sobre o centro do semi-círculo **FASE II - Realização das medições** **A – ainda dentro da sala de aula** Fazer a medição de cada aluno até à altura dos olhos com uma fita métrica e registar os valores por aluno na folha de relatório, identificado na coluna por h_1	**Distribui material pelos grupos**: um rectângulo de cartolina por aluno, 1 tesoura, 1 compasso e um transferidor. Supervisiona a construção do semi-círculo e a respectiva graduação: chama a atenção para a marcação de 10º em 10º sendo o ponto médio 0º, no centro superior do semi-círculo; para uma marcação rigorosa manda fazer a marcação com o transferidor e posteriormente prolongar a marcação até à fronteira do semicírculo a partir da união do centro do semi-círculo com as marcações previamente feitas. Distribui material pelos grupos de acordo com a conclusão das marcações referidas acima: 1 palhinha, 1 clip e 1 fio com, aproximadamente, 30 cm por aluno em cada grupo. Supervisiona e orienta a colagem da palhinha de forma correcta; Conforme os grupos vão concluindo esta parte da tarefa vai distribuindo uma fita métrica (10 ou 20 metros) por grupo para que o grupo faça as medições de todos os seus elementos desde os pés até à altura dos olhos. Estas medições deverão ser registadas em papel previamente preparado ou na folha de relatório e deve ser da responsabilidade do secretário.	Construção do astrolábio supervisionada pelas professoras Cada grupo proporciona o apoio a cada aluno através da partilha e entreajuda prestada: Explicando, "mostrando" e ajudando na realização da construção do astrolábio. Os alunos, no grupo, medem-se à vez, havendo o medidor, o medido e o secretário; O secretário faz o registo de 3 a 4 registos de h_1, um por cada aluno do grupo.
2º ½ bloco	**FASE II - Realização das medições** **B – no pátio da escola** Identificar o objecto de altura inacessível a ser medido; Cada aluno e com o astrolábio construído vai	Antes dos alunos saírem da sala de aula a professora indica que: 1)cada aluno deve transportar o seu astrolábio 2)cada secretário deve transportar consigo, ainda, a ficha de	Cada aluno, situado num determinado local escolhido, no pátio, e voltado para o objecto seleccionado pelo grupo, é apoiado por outros dois que fazem a medição de d esticando a fita métrica desde o local onde o aluno está

	fazer a medição do ângulo α; sem se mexer do local deve fazer a medição da sua distância até ao objecto seleccionado, d, com a fita métrica (10 ou 20 metros). Quer o α quer o valor de d, devem ser registados na folha de relatório na coluna identificada com as letras referidas. **FASE III – Tratamento, em sala de aula, dos dados recolhidos** para a determinação da altura do objecto **C – Cálculo de h_2 e de h para cada aluno** Apresentação dos cálculos na ficha/relatório dada **D – quanto mede o objecto?** Cálculo do valor médio dos valores encontrados em cada grupo **E – Entrega da ficha com os registos e com o trabalho de grupo** **FASE IV – Reflexão acerca do trabalho realizado:** Utilidade do astrolábio na medição de • objectos de alturas inacessíveis e • no posicionamento em relação à posição das estrelas. Recurso à trigonometria para determinação das alturas de objectos inacessíveis. Recurso ao valor médio das medições realizadas como um valor de referência. Correcção do trabalho realizado.	registo/relatório de grupo, material de escrita e fita métrica; -Já no pátio da escola e em grande grupo exemplifica como se devem efectuar as medições de d – com a fita métrica e de α com o astrolábio. Os objectos, previamente seleccionados para serem medidos (árvores, altura da entrada da escola, mastros de bandeiras, etc.) foram distribuídos pelos grupos Supervisiona com a outra professora o trabalho das medições; Incentiva os alunos a centrarem-se no trabalho matemático a realizar. Logo que cada grupo recolhe todos os dados é encaminhado, novamente, para a sala de aula. Supervisiona-se o trabalho a realizar. Apoia-se o trabalho de grupos gerindo dúvidas e obstáculos cognitivos; zela-se para que os grupos se centrem no trabalho a realizar e não se dispersem. Questionamento, nos grupos, acerca dos valores encontrados: qual deveria ser o valor a ser considerado para ser utilizado como altura do objecto? E porquê? Recolha dos relatórios dos grupos O tempo para esta reflexão foi bastante escasso: cerca de 10 minutos nas turmas B e E. Na turma A não houve sequer tempo algum para esta última fase.	posicionado até ao pé da vertical do objecto a ser medido. O secretário vai registando por aluno os valores de α e de d obtidos na medição do objecto seleccionado. Dentro da sala de aula, e em grupo, os alunos calcularam h_2 para cada um dos alunos através do recurso às funções trigonométricas e, implicitamente, à semelhança de triângulos. Determinaram por aluno o valor de h com recursos aos valores medidos de h_1 e de h_2. Perante a necessidade de decisão de qual o melhor valor e na ausência de quaisquer critérios de referência o recurso ao valor médio dos valores obtidos foi a opção para a qual todos os grupos foram conduzidos/orientados. Os alunos retomaram os seus lugares individuais na sala de aula voltados para o quadro e secretária do professor.

Tabela 6.8: Tarefa 3 - Caracterização da experiência matemática proporcionada

6.1.3.3. Os incidentes nas fases didácticas da Tarefa 3

***Grupos(3/4)* centrado nos alunos**

***Incidente 12 - Interferência da dinâmica do contexto escolar na dinâmica de sala de aula de Matemática* – $\mathbf{FT_8}$**

Na Escola A estavam a ser realizadas actividades de Educação Física ao ar livre e os alunos, da turma B, estavam excitados porque queriam participar nelas em vez de estarem na sala de aula de Matemática.

***Incidente 13 - Resistência de uma aluna para ser medida* – $\mathbf{AM_5}$**

Uma aluna não queria deixar-se medir uma vez que tinha complexos de "ser baixa".

***Incidente 14 - Medição de α e ausência de medição de d* – $\mathbf{AM_6}$**

Houve um grupo, na turma B, que realizou as medições de α mas não fez as medições de d. Sendo detectado na altura em que estava no pátio a realizar as medições foi orientado para as refazer relativamente ao objecto de altura inacessível seleccionado – o que fez.

Alguns grupos, da turma E, não recolheram os valores de d. Tendo sido detectado ainda no pátio da escola solicitou-se-lhes que refizessem as medições de d e de α – o que fizeram.

***Incidente 15 - Instabilidade do tempo meteorológico* - $\mathbf{AM_7}$**

A ameaça de chuva colocou problemas relativos à realização ou não da aula, da turma A, no pátio da escola – provocou alguma instabilidade e insegurança na professora acerca da tomada de decisão. As duas professoras (professora investigadora e a delegada de grupo) arriscaram e avançaram pela realização da aula. De facto o tempo manteve-se sem chuva e permitiu a realização da aula experimental de campo.

***Incidente 16 - Falta de rectângulos de cartolina para construção do astrolábio* - $\mathbf{AM_8}$**

Ao chegar à sala de aula, da turma A, a professora investigadora não encontrava os rectângulos de cartolina para a construção do astrolábio. Obviou o problema solicitando a um aluno que os fosse buscar à reprografia onde tinha deixado cortados rectângulos de cartolina (estava-se no 1º piso e a reprografia situava-se no 4º Piso) – este problema foi resolvido.

***Incidente 17 - Selecção e rotatividade do secretário em cada grupo* - $\mathbf{FT_9}$**

Os alunos, da turma A, demoraram algum tempo a decidir quem seria o secretário, nesta aula. Esta demora na escolha ocupou parte do tempo da aula sendo que quem foi secretário teve de passar a tabela de registo dos dados para a folha de relatório do grupo.

A rotatividade do secretário era vista como aspecto problemático uma vez que era penoso para alguns elementos ficarem com essa responsabilidade e para outros terem confiança na execução da função por outros elementos do grupo. A professora teve, por várias vezes, de alertar para a necessidade de rotatividade da função de secretário nas aulas de trabalho de grupo a Matemática como uma medida básica para o desenvolvimento da comunicação matemática escrita como um fim em si mesmo na matemática para além de ser considerado um meio essencial de comunicação.

***Incidente 18 - Falta das fichas de registo do trabalho de grupo* – AM$_9$**

Já dentro da sala de aula constatou-se a inexistência das fichas de registo do trabalho de grupo por não terem sido levadas para a sala de aula. Esta situação obrigou a que a tabela exemplificativa fosse desenhada no quadro e que os alunos com a função de secretário tivessem de a copiar para uma folha onde seria desenvolvido o relatório. Esta situação trouxe dificuldades acrescidas para o trabalho de grupo uma vez que ocupou parte do tempo da aula destinado à realização da tarefa já por si complexa e não permitiu a maior concentração nos aspectos centrais do trabalho matemático a realizar.

***Incidente 19 - Disparidade nos valores das medições obtidas* – AM$_{10}$**

Numa árvore com cerca de 5 metros de altura os alunos, de um dado grupo da turma A, obtiveram valores entre os 5 e os 10 metros (os alunos já tinham regressado do pátio e estavam dentro da sala de aula a completarem o guião do relatório). A professora responsabilizou o grupo pelas medições obtidas e pediu-lhes que reflectissem sobre os dados obtidos e qual o tipo de solução para a situação detectada. Os alunos tiveram dificuldade em assumir a responsabilidade da situação em que se encontravam. A solução proposta pela professora era a de refazerem novamente todas as medições caso houvesse tempo disponível. Como a situação já só foi detectada dentro da sala de aula depois de se ter vindo do pátio da escola e de se estar no fim da aula tornava-se inviável refazerem todas as medições no pátio da Escola situado no 3º Piso, de entrada; a contraproposta foi a de registarem, em relatório, a impossibilidade de se tirarem conclusões com os dados recolhidos e de escreverem qual seria a atitude a tomar para se corrigir a situação detectada e obterem um valor fiável para a medição daquela árvore de altura inacessível.

Dois grupos da turma E apresentaram valores de medições bastante discrepantes entre os seus elementos. Nenhum grupo fez qualquer referência a isso (incluindo qualquer reflexão).

Um terceiro grupo da turma E calculou a média de h_2 e não de h sem qualquer outro tipo de referência e/ou reflexão.

***Incidente 20 - Falta de interesse e empenho de alguns alunos* – $\mathbf{FT_{10}}$**

Mesmo com este tipo de aulas, recorrendo à construção do astrolábio e realizando medições de objectos de alturas inacessíveis, alguns alunos continuavam alheios ao trabalho matemático proposto: havia 3 alunos da turma A, um em cada grupo, que se mantinham desligados da dinâmica e do trabalho matemático desenvolvido (Álvaro Sampaio, Filipe Montes e Diogo Fontoura) e centrados em actividades alheias às propostas pelas tarefas. Estes alunos estavam fora da escolaridade obrigatória e tinham excesso de faltas o que os colocava em situação de possível retenção.

***Incidente 21 - Inexistência de tempo para reflectir sobre o trabalho prático realizado* – $\mathbf{AM_{11}}$**

Não houve tempo, na turma A, do 9º ano, para fazer a reflexão com toda a turma acerca da semelhança de triângulos ou para reflectir acerca da experiência matemática realizada num mesmo bloco.

6.1.4 Tarefa 4 – Noções básicas de Geometria com o *polydron*

A Tarefa 4 foi elaborada tendo em vista a recuperação/revisão de conceitos e definições básicas da Geometria para uns e um possível primeiro contacto para os alunos que no seu percurso, por variadíssimas razões, pudessem não ter contactado com essas noções básicas. Recorrer-se-ia a modelos de poliedros das famílias dos prismas e das pirâmides. Cada grupo deveria construir dois poliedros - um prisma e uma pirâmide. Para cada poliedro teriam de considerar três planificações diferentes, representá-las na folha do relatório e a partir daí teriam de resolver/responder a um conjunto de questões: o número de lados, o perímetro, eixos de simetria e área; deveriam calcular o volume de cada sólido construído. A variedade de prismas e pirâmides dentro da sala de aula foi pensada para que os alunos pudessem contactar com diferentes modelos dentro das famílias dos prismas e das pirâmides e promovendo o trabalho diferenciado por grupo na turma.

A ficha no formato seguinte foi preparada para se registarem as planificações de cada modelo de prisma ou pirâmide. A ficha também era orientadora do trabalho a realizar uma vez que identificava para cada planificação o número de lados, o perímetro, a área e o número de eixos de simetria. Também tinha espaço para apresentar o volume e da representação dos eixos/planos de simetria do sólido considerado.

a) Utilizando as peças do *polydron* constrói uma pirâmide/prisma (a definir).
b) Com o poliedro construído apresenta, se possível, 3 planificações diferentes[16] do mesmo e completa a tabela seguinte:
c) Descreve as regularidades[17] da tabela e apresenta os cálculos que efectuaste.

Planificação (desenho)	Nº de lados	Perímetro	Área	Volume	Nº de eixos de simetria. Desenha-os na planificação da 1ª coluna	Nº de eixos de simetria (planos) da pirâmide/prisma ________

Tabela 6.9: Tabela de registo da Tarefa 4

Na ficha do trabalho de grupo havia espaço para o registo dos cálculos relativos à área das três planificações solicitadas e ao volume do sólido considerado. Os alunos também deveriam descrever as regularidades que detectassem na tabela preenchida.

Esta tarefa, de natureza experimental, com recurso a material manipulável tem características de actividade de investigação uma vez que partindo do poliedro construído iam à procura de planificações distintas. A tarefa foi planificada para ½ bloco mas ocupou toda a aula de um bloco.

6.1.4.1. Conceitos, processos e competências matemáticas na Tarefa 4

Sistematizam-se, na Tabela 6.10, os conceitos, processos e competências matemáticas mobilizadas na Tarefa 4 nas diferentes fases didácticas.

[16] As planificações são consideradas diferentes caso não se possam sobrepor (por rotações e/ou simetrias).
[17] Considera-se regularidade as possíveis relações de dados que permitam inferir as características que se mantêm constantes.

Fase didáctica / *formato de trabalho* /recursos necessários	Tarefa 4 - Noções básicas de Geometria	
	Conceitos/ Processos	Competências
9ºB – 10/05 9ºA – 12/05 9ºE – 16/05 **I FASE/** ***Grupos(3/4)*** espalhados pela sala de aula – trabalho centrado nos alunos **1 bloco**	**Construção do modelo solicitado (prisma ou pirâmide) a partir das peças de *polydron* distribuídas** •prisma/pirâmide; vértice da pirâmide; bases dos prismas e base da pirâmide; •faces/lados/vértices; •perímetro/área/volume; •planificação e representação de planificações; •eixos de simetria no plano e no espaço; •apótema; •cálculo de volumes, áreas e perímetros; •Medições directas; •Determinação/contagem do número de lados da planificação; •Identificação de superfícies equivalentes	A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada às situações apresentadas; A predisposição para raciocinar matematicamente; A aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas com recursos a materiais manipuláveis; A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações; A compreensão do significado da forma de uma figura geométrica e o reconhecimento das relações entre elementos de figuras semelhantes; A tendência para procurar invariantes em figuras geométricas.

Tabela 6.10: Tarefa 4 - Conceitos, processos e competências

A II FASE da tarefa decorreu em meio bloco da aula seguinte uma vez que os alunos ocuparam um bloco a resolver a Tarefa 4.

6.1.4.2. Análise da experiência matemática proporcionada através da Tarefa 4

<table>
<tr><td>2 blocos</td><td colspan="3">Tarefa 4 - Noções básicas de Geometria</td></tr>
<tr><td>Tempo didáctico</td><td>Actividade matemática a realizar de acordo com a tarefa de aprendizagem-avaliação…</td><td>Papel do Professor</td><td>Papel do grupo (3 a 4 alunos) / aluno (individualmente)</td></tr>
<tr><td>Um bloco</td><td>Antes do início da aula:
Distribuição, pelos grupos, de peças de polydron, adequadas à construção de um determinado modelo de prisma e de um modelo de pirâmide.
I – Construção do prisma e da pirâmide com as peças do polydron distribuídas, inicialmente, pela professora.
II - Identificação de 3 planificações diferentes de um determinado modelo e sua representação.
III – Preenchimento de tabela
Para cada planificação, determinação do número de lados, do perímetro, dos eixos de simetria e cálculo da medida da área de cada planificação representada.
Realização de medições directas e/ou indirectas (com recurso ao Teorema de Pitágoras).
Identificação de superfícies equivalentes.
Cálculo da medida do volume dos sólidos construídos por grupo.</td><td>Distribui material pelos grupos: peças de polydron de forma a que se pudesse construir, em cada grupo, um determinado prisma e uma determinada pirâmide
Orientação do trabalho no grupo: se os grupos tivessem 4 elementos dois deveriam ficar com o prisma e dois deveriam ficar com a pirâmide; caso o grupo tivesse três elementos um deveria construir o prisma, outro a pirâmide e o terceiro deveria secretariar o trabalho de grupo.
Incentiva os alunos a centrarem-se no trabalho matemático a realizar.
Supervisiona o trabalho a realizar.
Apoio ao trabalho de grupos gerindo dúvidas e obstáculos cognitivos.

Recolha dos relatórios finais dos grupos..</td><td>Construir os modelos matemáticos do prisma e pirâmide atribuídas ao grupo;
Identificação de 3 planificações diferentes por cada sólido construído (prisma ou pirâmide).
Para cada planificação, representação e identificação dos elementos geométricos solicitados e seu registo em ficha distribuída.
Cálculo da medida do perímetro de cada planificação – explicitação da unidade de comprimento seleccionada.
Cálculo da medida da área de cada planificação – explicitação da unidade de área seleccionada.
Cálculo da medida do volume do poliedro (prisma ou pirâmide) construído – explicitação da unidade de volume considerada.</td></tr>
<tr><td>Meio bloco</td><td>I - Correcção do trabalho realizado
Correcção da Tarefa 4.
Identificação, definição e designação dos conceitos trabalhados; correcção do cálculo de perímetros, áreas das planificações; correcção do cálculo do volume com recurso ao Teorema de Pitágoras para o cálculo da altura da pirâmide e para a altura de uma das faces da pirâmide.
Sistematização do trabalho realizado nos grupos durante o 1º bloco;</td><td>A professora supervisiona o trabalho realizado pelos alunos no quadro, solicitando a alunos diferentes para irem fazer a correcção da tarefa ao quadro.</td><td>Os alunos retomaram os seus lugares individuais na sala de aula e acompanharam a professora que ia corrigindo no quadro a tarefa para um determinado poliedro.
9º B – pirâmide quadrangular
Na turma B pediu a um grupo que apresentasse o seu trabalho: a um dos elementos pediu para que fosse desenhar ao quadro, numa tabela, as três planificações diferentes da pirâmide quadrangular que tinha registado no relatório de grupo. A outro elemento, do mesmo grupo, pediu que fosse preencher a tabela no que respeita ao número de lados, ao perímetro (recorrendo a medições</td></tr>
</table>

	Identificação das regularidades da tabela preenchida e esclarecimento dos conceitos de superfícies equivalentes;	Enquanto os alunos iam corrigindo a tarefa no quadro a professora ia sublinhando alguns aspectos importantes no âmbito da Geometria e ia solicitando a toda a turma que fosse visualizando mentalmente o modelo do poliedro em questão e raciocinando em termos de simetria no plano e no espaço. Todo o outro trabalho foi realizado pela professora no quadro e todos os alunos deveriam fazer o registo daquele trabalho no respectivo caderno diário. O cálculo da altura de uma face (para determinação da área de uma face) e da altura da pirâmide (para cálculo do volume da pirâmide) foram feitos com recurso ao teorema de Pitágoras. Foram identificados os eixos de simetria das planificações e foram desenhados sobre as representações das planificações. Também foram identificados os eixos de simetria da pirâmide pentagonal; como na sala de aula não havia qualquer modelo do poliedro, os alunos foram desafiados a visualizarem mentalmente o modelo e a falarem sobre os eixos de simetria: planos de simetria.	directas dos lados das planificações com o *polydron*), à área (para calcular a área foi necessário calcular a altura da face triangular recorrendo ao Teorema de Pitágoras) e ao número de eixos de simetria da planificação – desenhando-os; a outro elemento solicitou que fosse calcular o volume (nesta situação utilizou-se, novamente o Teorema de Pitágoras para determinar a altura da pirâmide quadrangular – fez-se a distinção entre altura de uma face e a altura da pirâmide) e identificasse o número de eixos de simetria do poliedro em questão. 9ºE – pirâmide pentagonal Na turma E foi seleccionada a pirâmide pentagonal: tal como na turma B, solicitou a um elemento de um grupo que trabalhou o poliedro em questão para desenhar no quadro, em tabela adequada para o efeito, três planificações do poliedro em questão.

Tabela 6.11: Tarefa 4 - Caracterização da experiência matemática proporcionada

6.1.4.3. Os incidentes nas fases didácticas da Tarefa 4

***Incidente 22 - Representação das planificações* – AM$_{12}$**

Alguns alunos, da turma B, questionaram a professora acerca da escala a usar para a representação das planificações uma vez que o espaço disponível na ficha de registo da actividade era bastante diminuto. A professora sugeriu que fizessem de forma esquemática mas alguns grupos usaram o decalque à contra-luz, das planificações obtidas com recurso ao *polydron* nas janelas da sala para fazerem a representação das planificações e, por isso, à escala 1:1.

***Incidente 23 - Falta de interesse e empenho de alguns alunos* – FT$_{11}$**

Havia 3 alunos na turma A, um em cada grupo (sete grupos no total), que se mantinham desligados da dinâmica e do trabalho matemático desenvolvido: Álvaro Sampaio, Filipe Montes e António Vilela. Estes alunos não estavam centrados na tarefa mas na conversa. O Álvaro Sampaio na aula anterior tinha sido posto fora da sala de aula por comportamento desadequado mas não alterou substancialmente o seu comportamento da aula anterior para a presente aula – de referir que este aluno já tinha 12 faltas à disciplina de Matemática e estava fora da escolaridade obrigatória pelo que podia ser retido por excesso de faltas.

***Incidente 24 - Funcionamento do grupo do Ricardo Santelmo, Diogo Fontoura, Filipe Montes e Maria* – FT$_{12}$**

Dentro deste grupo formaram-se dois pares: Maria - Ricardo Santelmo e Diogo Fontoura – Filipe Montes. Constatando-se que havia pouco trabalho e muita conversa entre o Diogo Fontoura e o Filipe Montes justificaram a conversa pela não compreensão do que se questionava: foram chamados à atenção e foi solicitado ao Ricardo Santelmo para ajudar e explicar a matéria aos colegas de grupo que diziam ter dificuldades. O Ricardo Santelmo recusou-se dizendo que essa tarefa competia à professora. Nessa altura a professora abandonou o grupo…Num momento posterior constatou que a Maria e o Ricardo Santelmo estavam a fazer a parte do trabalho de grupo que era da competência do Diogo Fontoura e do Filipe Montes. A professora chamou a atenção do grupo para a importância de cada elemento assumir a sua quota parte do trabalho de grupo, da entreajuda entre todos os elementos e que não era aceitável que alguns elementos do grupo se substituíssem aos colegas.

***Incidente 25 - Investimento fora do normal do André Mota* – FT$_{13}$**

O André Mota, do 9º A, é um aluno que assumidamente gosta mais de "*contas*" do que de "Geometria". No entanto nesta aula trabalhou empenhadamente e mobilizou todo o grupo.

***Incidente 26 - Interferência da dinâmica do contexto escolar na dinâmica de sala de aula de Matemática* – $\mathbf{FT_{14}}$**

Os alunos do 9º E, na aula imediatamente anterior à da disciplina de Matemática, tiveram prova global a Tecnologias de Informação e Comunicação pelo que vinham agitados e excitados comentando entre si como tinham feito/realizado a prova.

***Incidente 27 - Dificuldade na construção dos modelos matemáticos do prisma e da pirâmide* – $\mathbf{AM_{12}}$**

Os alunos do 9º E demoraram bastante tempo para construírem os modelos matemáticos com as peças de *polydron* distribuídas a cada grupo: a maior parte das vezes conseguiam construir um dos modelos prismáticos ou piramidais que não tinham sido solicitados e faltando-lhe peças para o segundo modelo.

***Incidente 28 - Dificuldade na determinação de 3 planificações distintas* – $\mathbf{AM_{13}}$**

A maioria dos alunos do 9º E dizia desconhecer o que era uma planificação de um determinado sólido. Uma primeira planificação foi encontrada a partir do modelo construído do sólido. Chegados a uma planificação não investiam na procura de uma outra uma vez que tinham a concepção de que havia uma planificação e não várias - esta postura apresentou-se como uma limitação, *a priori* na procura de outras planificações. O método proposto foi sempre voltar ao modelo de sólido construído e "*espalmarem-no*" de diferentes modos, verificando sistematicamente se tinham obtido planificações distintas.

***Incidente 29 - Visita da directora de turma à sala de aula de Matemática* – $\mathbf{FT_{15}}$**

A directora de turma e professora de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) veio procurar o Yuan, aluno do 9º E, à aula de Matemática para efectuar averiguações acerca do seu comportamento em relação ao professor de Geografia. Nesta altura toda a turma ficou alvoroçada e questionaram a professora de TIC se lhes tinha gravado e ficado com o trabalho final/prova global. Permiti que o Yuan acompanhasse a directora de turma e solicitei que a directora de turma abandonasse a sala de aula.

***Incidente 30 - Grupos de 4 ou grupos de 2?* – $\mathbf{FT_{16}}$**

A professora, no início da aula, tinha dado como orientações que cada dois alunos, no grupo, ficassem ou com um prisma ou uma pirâmide. Saliente-se que, nesta turma de 27 alunos, os grupos eram formados por 4 alunos cada. A determinada altura estavam a funcionar, na turma, 14 grupos de 2 elementos e não 7 grupos de 4 elementos pelo que a acção da professora ficou muito mais limitada e condicionada quando dividida pelo dobro dos grupos. Note-se que cada grupo de dois no grupo de quatro não se entreajudava.

6.1.5 Tarefa 5 – Construção de um tronco de cone com régua e compasso

A Tarefa 5 foi elaborada de forma a ter como produto final a construção de um tronco de cone com determinadas características: a sua planificação com régua e compasso partia de dados e raciocínios de interpretação de uma situação apresentada na tarefa distribuída. A mobilização de diversos conceitos geométricos que foram sendo abordados de forma parcial ao longo do currículo do Ensino Básico para a construção da planificação do tronco de cone estava integrada na resolução da tarefa cuja natureza configurava a resolução de problema para alunos do 9º Ano de escolaridade. A tarefa era ilustrada por um esquema da planificação de um tronco de cone ao qual estavam associados várias medidas. A ficha no formato seguinte foi preparada para apoiar a planificação e construção do tronco de cone.

Tarefa 5 - Construção de um tronco de cone

I – Planificação

1. Construir, em cartolina, um sector de uma **coroa circular** de raios 8 cm e 16 cm e de amplitude 90º

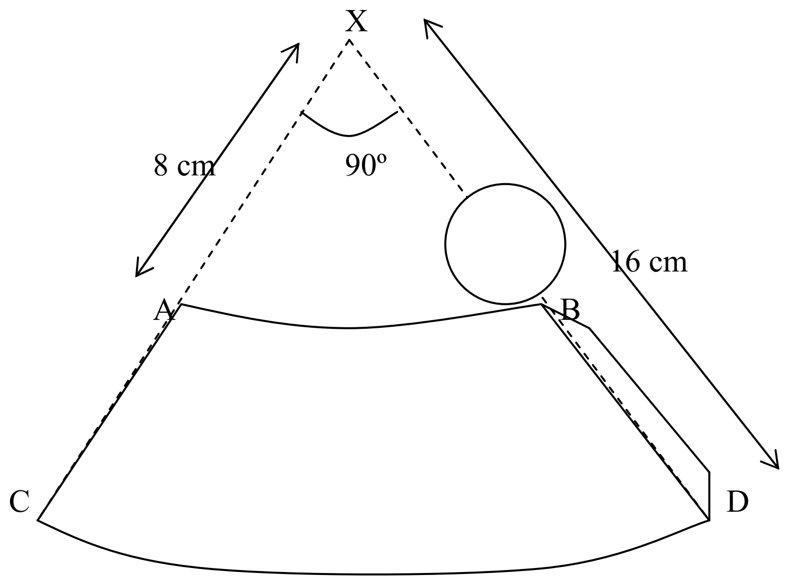
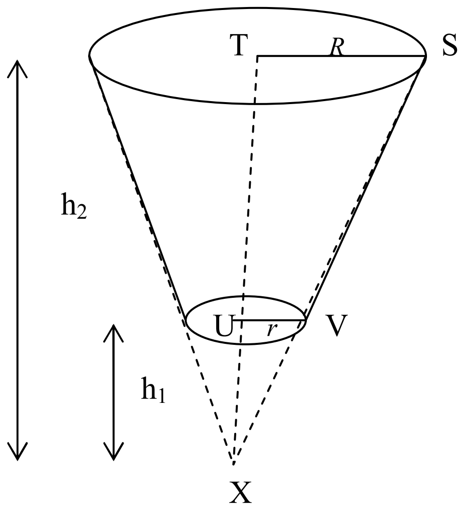


Figura 6.5: Tarefa 5 – Construção de um tronco de cone

2. Determinar o comprimento do arco menor AB.
3. Calcular o raio da circunferência cujo perímetro é o do comprimento do arco AB.
4. Desenhar a circunferência C_1 para que fique tangente ao arco AB.
5. Desenhar "abas" na circunferência e no sector circular conforme se pode observar na figura

II – Determinação da área total da planificação do copo
III – Construir o copo ("tronco de cone") a partir da planificação do mesmo
IV – Determinação do volume do copo ("tronco de cone")



Sugestão: Observa que $\Delta[XUV] \approx \Delta[XTS]$

V– Elabora um relatório
onde apresentes os cálculos e conclusões a que chegaste. Sempre que necessário apresenta os esquemas e desenhos que realizaste ou de que te socorreste para o teu trabalho matemático.

6.1.5.1. Conceitos, processos e competências matemáticas na Tarefa 5

Sistematizam-se na tabela seguinte, Tabela 6.12, os conceitos, processos e competências matemáticas mobilizadas na Tarefa 5 nas diferentes fases didácticas.

<table>
<tr><th rowspan="2">Fase didáctica / formato de trabalho /recursos necessários</th><th colspan="2">Tarefa 5 - Construção de um tronco de cone</th></tr>
<tr><th>Conceitos/ Processos</th><th>Competências</th></tr>
<tr><td>9ºA – 23/05
9ºB – 24/05
9ºE – 25/05
I FASE/
Grupos(3/4) espalhados pela sala de aula – trabalho centrado nos alunos</td><td>Altura do cone;
Amplitude de arco;
Aplicação da regra de três simples;
Arco de circunferência;
Arco menor;
Área da planificação (tronco de cone);
Área de um sector circular;
Área do círculo;
Circunferência tangente a um dado arco;
Circunferências concêntricas de raios diferentes;
Comprimento de arco;
Construção de um tronco de cone;
Coroa circular;
Determinação do raio do círculo dado o perímetro;
Geratriz do cone;
Medição de comprimentos;
Perímetro de circunferência/círculo;
Planificação do tronco de cone;
Proporcionalidade;
Razão de semelhança;
Regra de três simples;
Resolução de equações;
Resolução de problemas;
Sector de coroa circular;
Semelhança de triângulos (razão de semelhança);
Teorema de Pitágoras;
Volume de um cone;
Volume do tronco de cone.</td><td rowspan="2">A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução;
A tendência para procurar ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação.
A aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas com recurso a planificações em cartolina;
A aptidão para usar a visualização e o raciocínio espacial na resolução de problemas;
O reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações.
A compreensão do significado da forma de uma figura geométrica e o reconhecimento de relações entre elementos de figuras semelhantes;
A aptidão para resolver problemas geométricos através de construções, nomeadamente, envolvendo a semelhança de triângulos assim como para justificar os processos.</td></tr>
<tr><td>II FASE/
Grupo turma
Cada aluno deveria voltar para o seu lugar – trabalho centrado no professor</td><td>Sistematização de todo o trabalho realizado no 1º bloco com especial atenção para a determinação do raio do círculo do tronco de cone através do cálculo do perímetro da parte do círculo menor do quarto da coroa circular, o cálculo da área da superfície da coroa circular e do volume do tronco de cone. O recurso à diferença entre áreas de círculos para calcular a área da coroa circular e entre volumes de cones para determinar o volume do tronco de cone foi realizado através da visualização do esquema desenhado e do raciocínio matemático.</td></tr>
</table>

Tabela 6.12: Tarefa 5 - Conceitos, processos e competências

6.1.5.2. Análise da experiência matemática proporcionada através da Tarefa 5

1 bloco	**Tarefa 5- Construção de um tronco de cone**		
Tempo didáctico	**Actividade matemática a realizar de acordo com a tarefa de aprendizagem-avaliação…**	**Papel do Professor**	**Papel do grupo (3 a 4 alunos) / aluno (individualmente)**
1º bloco	Planificação de um tronco de cone: -desenho de um sector de coroa circular (90º) num rectângulo de cartolina (recorrendo a um compasso, régua e transferidor); -determinação do comprimento de arco relativo à circunferência concêntrica de menor raio do sector da coroa circular; -determinação do raio da circunferência cujo perímetro coincide com o comprimento de arco determinado anteriormente; -desenho da circunferência cujo raio foi determinado e de forma a que seja tangente à parte interior do sector circular; -desenho das "abas" na planificação do tronco de cone sendo triângulos no círculo. Determinação da área da planificação: -área de um círculo; -área do sector circular. Determinação do volume do tronco de cone: -cálculo da altura do cone maior e do cone menor; -cálculo da diferença dos volumes	Material levado para a sala de aula para os grupos: Copos de café em plástico – como possíveis modelos do tronco de cone; Compassos, réguas, transferidores e réguas; 2 cartolinas cada uma dividida em quatro partes; Escreve o sumário Organiza o trabalho na sala de aula por grupos. Explicita que o trabalho irá ser exigente e que deveriam estar concentrados na actividade a desenvolver. Esclarece que um elemento de cada grupo deveria ser mais responsável pelo desenho da planificação, outro pelos cálculos e obtenção dos dados necessários para a construção da planificação. Supervisiona o trabalho realizado por cada grupo e por todos os grupos; Perante dúvidas persistentes e generalizadas de todos os grupos a professora esclarece toda a turma acerca do que era uma coroa circular: porção de plano delimitada por duas circunferências concêntricas. Observa os grupos a realizar a actividade movimentando-se por toda a sala, colocando questões pertinentes, ajudando a desbloquear impasses e promovendo a recentração do grupo na tarefa proposta; Chamada de atenção para o modo de cálculo da área do sector da coroa circular com recurso a uma parte proporcional da coroa circular e não da planificação do cone; Recolha dos relatórios de grupo	Escolha do secretário (diferente do da aula anterior) Desenho da planificação do tronco de cone de acordo com os dados presentes no esquema da ficha guião da tarefa; Elaboração de cálculos e obtenção de dados necessários para a construção/planificação do tronco de cone. Determinação do perímetro do sector circular da circunferência menor; Determinação da área do sector da coroa circular acrescida do círculo; Determinação do volume do tronco de cone.
½ bloco	Correcção da Tarefa 5. Sistematização do trabalho realizado nos grupos durante no 1º bloco;	9ºA, 9ºB, 9ºE -Sistematizou-se/corrigiu-se a actividade matemática realizada no 1º bloco, em trabalho de grupo. Supervisão de se os alunos estavam a acompanhar o trabalho realizado.	INDIVIDUAL / grupo turma Os alunos retomaram os seus lugares na sala de aula em carteiras dois a dois e virados para o quadro. Todos registaram nos respectivos cadernos diários, mesmo quem realizou a função de secretário, a correcção da tarefa e a realização dos exercícios propostos e trabalhados.

Tabela 6.13: Tarefa 5 - Caracterização da experiência matemática proporcionada

6.1.5.3. Os incidentes críticos nas fases didácticas da Tarefa 5

1º bloco I FASE /*Grupos(3/4)* centrado nos alunos

***Incidente 31 - Dificuldade na resolução da tarefa - coroa circular* – $\mathbf{AM_{14}}$**

A expressão "coroa circular" causava dificuldades na generalidade dos alunos. Na turma E, do 9º Ano, a professora optou por introduzir para toda a turma, em simultâneo, o significado matemático de "coroa circular" como a porção de plano compreendida entre duas circunferências concêntricas. No caso da tarefa em questão pretendia-se a representação de um sector da coroa circular de 90º de amplitude.

***Incidente 32 - Dificuldade na resolução da tarefa – determinação do comprimento do arco menor AB* – $\mathbf{AM_{15}}$**

Alguns grupos consideraram um valor aleatório para o raio do círculo representado como o "fundo" do tronco de cone. Nesses grupos a professora questionou a validade de tal opção recorrendo ao modelo de copo distribuído como exemplo em cada grupo: estabelecendo a relação de que o perímetro do círculo do "fundo" teria de coincidir com o comprimento do arco menor AB.

***Incidente 33 - Dificuldade na resolução da tarefa – representação do círculo não tangente ao arco menor AB* – $\mathbf{AM_{16}}$**

A representação esquemática da tarefa de forma incorrecta devido a dificuldades de representação com as ferramentas do computador (não tangente ao arco menor AB) levou a que nalguns grupos representassem o círculo de forma não tangente – a professora teve que explicitar a forma incorrecta da representação na tarefa distribuída.

***Incidente 34 - Dificuldade na resolução da tarefa – o grupo do Marcos – o perímetro e a área* – $\mathbf{AM_{17}}$**

O grupo deste aluno apresentava dificuldades no cálculo do comprimento do arco menor AB. A professora explicou directamente ao grupo o modo de se efectuarem os cálculos para a sua determinação e abandonou o grupo julgando que tinham compreendido. Num segundo momento, verificando o andamento do grupo, constatou que não tinham calculado o comprimento do arco menor AB, porque não tinham compreendido. A professora explicou uma segunda vez.

Quanto à explicação acerca do modo de cálculo da medida da área do sector da coroa circular depois do grupo ter explicitado dúvidas a professora percebeu que apesar dos alunos se manterem em silêncio e atentos não tinham percebido nada. O Marcos enquanto a professora explicava ia acenando que sim com a cabeça: tinha feito exactamente o mesmo aquando da explicação do cálculo do comprimento do arco menor AB. Como não se manifestassem a professora perguntou se tinham percebido. Como confirmassem a sua suspeita de que não tinham percebido a professora chamou-lhes à atenção por não terem explicitado as respectivas dúvidas. A professora investiu novamente na explicação de forma mais vagarosa e recorrendo inicialmente ao desenho da coroa circular e perguntou-lhes como é que se calculava a área da coroa circular, dando-lhes algum tempo para reflectirem e raciocinarem: sugeriu o recurso aos círculos – à área do círculo maior dever-se-ia tirar a área do círculo menor (como se fizesse um "buraco" no círculo maior); de seguida como se pretendia não a coroa circular mas apenas um sector poder-se-ia recorrer à regra de três simples para se determinar proporcionalmente a área do sector que correspondia a 90º de amplitude.

***Incidente 35 - Dificuldade na resolução da tarefa – o volume do tronco de cone* – $\mathbf{AM_{18}}$**

No cálculo do volume do tronco de cone também houve dificuldades: o facto de não haver uma fórmula pronta a aplicar acarretava dificuldades. Por outro lado, depois de raciocinarem e detectarem a forma como se poderia calcular o volume do tronco de cone com recurso à diferença de volumes de cones imaginários debateram-se com a dificuldade de determinarem as alturas desses cones. Para isso tiveram de recorrer à semelhança dos triângulos $\Delta[XUV] \cong \Delta[XTS]$ e ao teorema de Pitágoras.

6.1.6 Tarefa 6 – Paralelismo e perpendicularidade no plano e no espaço: critérios

A Tarefa 6 foi concebida para trabalhar e aprofundar as posições relativas de rectas, de planos, de rectas e planos, fazer a sua sistematização e estudar os critérios quer de paralelismo quer de perpendicularidade. Para a tarefa 6 havia 7 exemplares distintos uma vez que havia 7 figuras diferentes com as formas seguintes: 2 prismas hexagonais rectos – um assente sobre uma base e outro assente sobre uma face lateral; 1 prisma pentagonal recto assente sobre uma base, 1 prisma triangular recto assente sobre uma face lateral, 2 prismas quadrangulares regulares – um assente sobre uma base e outro assente sobre uma face lateral e 1 prisma rectangular recto (ou paralelepípedo recto) assente sobre a face menor. As perguntas nas tarefas eram rigorosamente as mesmas mas como as figuras a observar eram todas diferentes poderemos afirmar que todos os grupos tinham tarefas distintas pelo que tinham que as realizar nos grupos, de forma autónoma. A estrutura da tarefa 6 era a seguinte:

Tarefa 6

Observa a figura (foram apresentadas diversos prismas em diferentes posições)

1.Identifica no sólido em estudo, caso existam, um par de planos:

a) Estritamente paralelos.
b) Perpendiculares e a sua recta de intersecção.
c) Oblíquos e a sua recta de intersecção.
d) Paralelos coincidentes.

2.Identifica no sólido em estudo, caso existam, uma recta e um plano:

a) Estritamente paralelos.
b) Perpendiculares e o seu ponto de intersecção.
c) Oblíquos e o seu ponto de intersecção.
d) Em que a recta está contida (aposta ao) no plano.

3.Identifica no sólido em estudo, caso existam, um par de rectas:

a) Estritamente paralelas.
b) Perpendiculares e o seu ponto de intersecção.
c) Oblíquas e o seu ponto de intersecção.
d) Paralelas coincidentes.
e) Não complanares.

Apresenta um esquema/síntese das posições relativas de rectas no espaço.

Figura 6.6: Tarefa 6 – Paralelismo e perpendicularidade … critérios

6.1.6.1. Conceitos, processos e competências matemáticas na Tarefa 6

Sistematizam-se na tabela seguinte, Tabela 6.14, os conceitos, processos e competências matemáticas mobilizadas na Tarefa 6 nas diferentes fases didácticas.

Tempo didáctico	**Tarefa 6 – Paralelismo e perpendicularidade … critérios**	
Fase didáctica / ***formato de trabalho*** **/recursos necessários**	Conceitos/ Processos	Competências
9ºB – 31/05 9ºA – 30/05 9ºE – 30/05 **I FASE**/ ***Grupos(3/4)*** espalhados pela sala de aula – trabalho centrado nos alunos	Ponto, recta, plano e espaço. Paralelismo; Perpendicularidade; Concorrência; Observação da figura do espaço desenhada na folha da tarefa; Identificação de rectas, rectas e planos e planos posicionados entre si de diferentes modos; Utilização correcta de simbologia na representação de pontos, rectas e planos; Representação no plano de rectas e planos do espaço.	A aptidão para discutir com os outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso da linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação. A tendência para procurar ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente na situação. A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em geometria; A compreensão de conceitos e aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos; O gosto por identificar propriedades e relações geométricas; A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas através da análise e comparação de figuras para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios;
II FASE/ ***Grupo turma*** Cada aluno deveria voltar para o seu lugar – trabalho centrado no professor	Sistematização de todo o trabalho realizado no 1º bloco. Critérios de paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos.	

Tabela 6.14: Tarefa 6 - Conceitos, processos e competências

6.1.6.2. Análise da experiência matemática proporcionada através da Tarefa 6

1 bloco	**Tarefa 6 – Paralelismo e perpendicularidade no plano e no espaço: critérios**		
Tempo didáctico	**Actividade matemática a realizar de acordo com a tarefa de aprendizagem-avaliação…**	**Papel do Professor**	**Papel do grupo (3 a 4 alunos) / aluno (individualmente)**
1º ½ bloco	Resolução da Tarefa 6: Representação do sólido desenhado na folha da tarefa na folha do relatório Apresentação das rectas, planos de acordo com as posições relativas pedidas.	Escreve o sumário Organiza o trabalho na sala de aula: trabalho em grupo 9ºE – Entrega o relatório da Tarefa 5 avaliado e anotado com *feedback* Supervisiona o trabalho realizado por cada grupo e por todos os grupos; Observa os grupos a realizar a actividade movimentando-se por toda a sala, colocando questões pertinentes, ajudando a desbloquear impasses e promovendo a recentração do grupo na tarefa proposta; Recolha dos relatórios de grupo	Escolha do secretário (diferente do da aula anterior) Desenho do sólido na folha do relatório; Observação e identificação de rectas, rectas e planos e planos em determinadas posições (de acordo com os pedidos) .
2º ½ bloco	Sistematização do trabalho realizado nos grupos durante o 1º ½ bloco; Resolução do exercício 9 da pág. 109 e dos exercícios 1 a 5 da pág. 115 do manual adoptado.	-Sistematizou-se a actividade matemática realizada no 1º meio bloco, em trabalho de grupo. Supervisão de se os alunos estavam a acompanhar o trabalho realizado centrado na professora: Apresentação dos critérios de paralelismo e de perpendicularidade.	INDIVIDUAL / grupo turma Os alunos retomaram os seus lugares na sala de aula em carteiras dois a dois e virados para o quadro. Todos registaram nos respectivos cadernos diários.

Tabela 6.15: Tarefa 6 - Caracterização da experiência matemática proporcionada

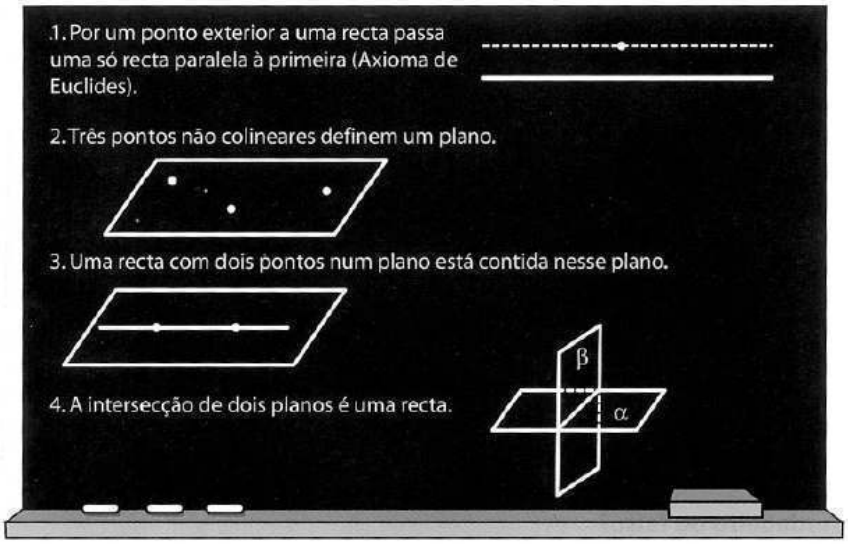
6.1.7 Tarefa 7 – A Geometria como construção hipotético-dedutiva

A Tarefa 7 foi seleccionada do manual adoptado, páginas 116-117, e, tal como as tarefas 1 e 2, é apresentada como uma tarefa "*Para Descobrir*".

PARA DESCOBRIR...

Actividade 1

Observa as frases escritas no quadro.



1. Com base nessas propriedades vais demonstrar o critério de paralelismo de recta e plano:

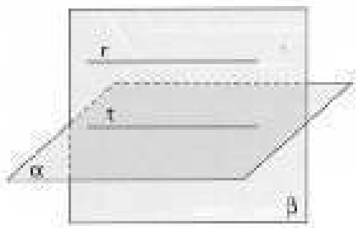
Uma recta é paralela a um plano se for paralela a uma recta contida nesse plano.

Para efectuares esta demonstração, copia e completa, na página seguinte, os espaços em branco de modo a obteres afirmações verdadeiras.

Hipótese:
• A recta r é ___ à recta t e t está ___ em α.

Tese:
• A recta r é ___ ao plano α.

Demonstração:
Como a recta r é paralela à recta t, as duas rectas são ___, ou seja, existe um plano β que as contém.



Assim, os planos α e β são ___ intersectando-se segundo a recta ___.

Pela propriedade 4 (do quadro) – a intersecção de ___ e ___ é ___ – os dois planos não possuem nenhum ponto comum que não pertença a essa recta.

A recta r é paralela ao plano α, pois, se o intersectasse, o ponto que teriam em comum pertenceria à recta ___ de intersecção dos dois planos, o que é absurdo, uma vez que, por hipótese, as rectas r e t são ___.

2. Com base nas propriedades do quadro, demonstra que:
Uma recta e um ponto exterior determinam um plano.

Figura 6.7: Tarefa 7 – A Geometria como construção hipotético-dedutiva

Esta tarefa introduz os alunos na Geometria como uma construção hipotético-dedutiva: os conceitos de hipótese, tese e demonstração aparecem de forma esquemática.

6.1.7.1. Conceitos, processos e competências matemáticas na Tarefa 7

Sistematizam-se na tabela seguinte, Tabela 6.16, os conceitos, processos e competências matemáticas mobilizadas na Tarefa 7 nas diferentes fases didácticas.

<table>
<tr><td>Tempo didáctico</td><td colspan="2">Tarefa 7- A Geometria como construção hipotético-dedutiva</td></tr>
<tr><td>Fase didáctica / formato de trabalho /recursos necessários</td><td>Conceitos/ Processos</td><td>Competências</td></tr>
<tr><td>9ºB – 02/06
9ºA – 02/06
9ºE – 01/06
I FASE/
Grupos(3/4)
espalhados pela sala de aula – trabalho centrado nos alunos</td><td>Termos primitivos;
Axioma;
Hipótese;
Tese;
Demonstração de um determinado critério;</td><td rowspan="2">O gosto e a confiança pessoal em realizar actividades intelectuais que envolvam raciocínio matemático;
A compreensão de noções de conjectura, teorema e demonstração;
A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada às situações apresentadas;
A compreensão das noções de teorema e demonstração;
A aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação de figuras, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios.</td></tr>
<tr><td>II FASE/
Grupo turma
Cada aluno deveria voltar para o seu lugar – trabalho centrado no professor</td><td>Sistematização de todo o trabalho realizado no 1º ½ bloco.
Realização de outras demonstrações.
.</td></tr>
</table>

Tabela 6.16: Tarefa 7 - Conceitos, processos e competências

6.1.7.2. Análise da experiência matemática proporcionada através da Tarefa 7

1 bloco	**Tarefa 7- A Geometria como construção hipotético-dedutiva**		
Tempo didáctico	**Actividade matemática a realizar de acordo com a tarefa de aprendizagem-avaliação…**	**Papel do Professor**	**Papel do grupo (3 a 4 alunos) / aluno (individualmente)**
1º ½ bloco	Resolução da "Actividade 1." das pág. 116-117 do manual adoptado.	Escreve o sumário Organiza o trabalho na sala de aula: Trabalho em grupo 9ºE – Entrega o relatório da Tarefa 6 avaliado e anotado com *feedback* Supervisiona o trabalho realizado por cada grupo e por todos os grupos; Observa os grupos a realizar a actividade movimentando-se por toda a sala, colocando questões pertinentes, ajudando a desbloquear impasses e promovendo a recentração do grupo na tarefa proposta; Recolha dos relatórios de grupo	Escolha do secretário (diferente do da aula anterior). Realização da tarefa proposta; Elaboração do relatório de grupo de acordo com o solicitado;
2º ½ bloco	Correcção da Tarefa 7. Identificação, definição e designação de hipótese, tese; Sistematização do trabalho realizado nos grupos durante o 1º ½ bloco; Demonstração do critério de paralelismo entre recta e plano; Demonstração de outras relações.	-Sistematizou-se/corrigiu-se a actividade matemática realizada no 1º meio bloco, em trabalho de grupo; Demonstração com toda a turma chamando a atenção para a natureza da demonstração como um processo característico da matemática enquanto ciência.	INDIVIDUAL / grupo turma Os alunos retomaram os seus lugares na sala de aula em carteiras dois a dois e virados para o quadro. Todos registaram nos respectivos cadernos diários, mesmo quem realizou a função de secretário, a correcção da tarefa.

Tabela 6.17: Tarefa 7 - Caracterização da experiência matemática proporcionada

6.1.8 Trabalho de projecto – "As rotações estão em toda a parte"

A gestão curricular de um trabalho de projecto é uma tarefa bastante complexa: além de acompanhar a elaboração e o desenvolvimento de um projecto, é fundamental que promova a sua implementação em todos os grupos de uma turma ou de todas as turmas o que significa, assim, acompanhar o desenvolvimento do trabalho de cerca de 6 a 7 grupos por turma (20 a 25 grupos em três turmas) para que o trabalho de projecto seja salvaguardado. A evolução equilibrada e consequente de projectos em meio escolar e numa lógica de sala de aula, partindo de uma planificação exequível, acessível e consequente tem de ser supervisionada pelo professor a partir de uma avaliação sistemática e contínua que suporte a autonomia, criatividade e desenvolvimento cognitivo e integral dos alunos. As acções executadas e o aprofundamento cognitivo permitirão e proporcionarão que os alunos atribuam significado às experiências matemáticas realizadas.

O trabalho de projecto proposto sob o tema "As rotações estão em toda a parte", desenvolvido ao longo de cerca de mês e meio, tinha como objectivo o aprofundamento e estudo das rotações (transformações no plano) partindo das noções do senso comum que os alunos tinham como cidadãos. A explicitação dos objectivos, dos prazos, das fases e dos produtos que se esperavam organizaram a dinâmica e desenvolvimento do trabalho de projecto. Em cada turma cada grupo deveria centrar-se em subtemas diferentes para que o trabalho da turma se enriquecesse com o contributo particular de cada grupo e cada grupo beneficiasse do estudo dos demais e mais do que comparar pudesse admirar e usufruir do trabalho dos outros: era como que a especialização de cada grupo pudesse contribuir de forma peculiar e decisiva para o enriquecimento substantivo e significativo da turma. A atribuição de cada tema foi feita de forma aleatória para que os alunos não a atribuíssem a qualquer intenção da professora e/ou a quaisquer atributos especiais do grupo em questão: isto é, cada grupo, *a priori*, estaria capacitado para trabalhar um qualquer subtema.

Desde o seu lançamento (início de Março), com a distribuição do formulário em A4 por cada aluno até à conclusão, com o aparecimento dos cartazes elaborados, os alunos iriam ter aulas destinadas explicitamente para o desenvolvimento do trabalho de projecto. Cada uma das 4 a 5 aulas seriam o ponto de chegada do trabalho já realizado (individualmente ou em grupo) e constituiriam um espaço fundamental quer do trabalho conjunto quer de negociação e tomadas de decisão do grupo acerca do trabalho de projecto. O trabalho de projecto realizado no formato de trabalho de grupo não dispensou o trabalho individual: numa primeira fase a recolha de imagens, fotografias e/ou desenhos a serem coligidos em portefólio teria de ser realizada por cada um dos elementos de grupo e levados para uma segunda aula de forma a fazer-se uma avaliação do material angariado e organizado para o efeito. Cada aula destinada para o desenvolvimento do trabalho de projecto teria de ser preparada não só pela professora como pelos próprios alunos de cada grupo: a responsabilidade pelo desenvolvimento do trabalho na(s) aula(s) era partilhada – não levar as imagens recolhidas impedia o avanço no trabalho; levar as imagens permitia que os pares avaliassem o empenhamento e a eficácia de cada um: a consequência imediata era poder analisar se as imagens correspondiam a rotações a outras quaisquer isometrias/transformações geométricas. Havia os alunos que não conseguiam levar quaisquer imagens ou por falta de dedicação e procura ou por não terem acesso a documentos (revistas, livros, panfletos publicitários) ou à *internet*. Para esses casos e situações a professora lembrou que podiam recorrer à Biblioteca para a consulta de documentos quer em suporte físico quer através da *internet*. Alternativamente providenciou que na sala de aula estivessem livros, revistas que os alunos pudessem consultar e isso não fosse impedimento da realização do trabalho proposto. O acompanhamento e supervisão de cada grupo, pela professora, estavam centrados nos subtemas diferenciados: em cada turma eram trabalhados 6 a 7 subtemas de acordo com a respectiva dimensão. Nestas aulas os alunos podiam ter necessidade de sair da sala (sempre devidamente autorizados após o esclarecimento do que iam fazer e onde): ou para poderem consultar livros e revistas e/ou para acederem à *internet* na Biblioteca ou para obterem cópias de imagens seleccionadas nos livros, revistas e/ou catálogos na mediateca.

6.1.8.1. Papel do professor

O professor teve um papel de facilitador de recursos e de conselheiro nas actividades/experiências de aprendizagem. Nesta situação houve necessidade de recorrer a fontes múltiplas e primárias: houve alunos que solicitaram catálogos de materiais de construção junto de lojas da especialidade e outros que trouxeram as revistas de tapetes de Arraiolos de casa. Estas fontes diversas permitiram trazer para dentro da sala de aula a realidade da vida do dia-a-dia e estar aberto à descoberta conjunta com os alunos. Assumir este papel exigiu que o professor tivesse uma maior disponibilidade para a prática da observação (do ambiente em geral e de cada grupo em particular).

Podemos assim afirmar que a existência de um trabalho de projecto nestas condições permite que a dinâmica de sala de aula da disciplina de matemática saia do espaço físico e dos recursos típicos a que está geralmente confinada. Os alunos tiveram que observar os elementos com que estavam familiarizados de uma outra forma – talvez com critérios matemáticos - para poderem identificar rotações nas fachadas das casas, nos monumentos, nos azulejos que poderiam revestir as igrejas e mesmo nas suas casas (WC, cozinha, corredor, fachadas, etc.), nos elementos presentes nos tapetes que pisavam, nos frisos que poderiam existir nos mais diversos sítios (rodapés, cozinhas, casas de banho, igrejas), etc. Depois de os terem observado mais ou menos profundamente tiveram que seleccionar e recolher os elementos figurativos que deveriam fazer parte do portefólio. Já na sala de aula tiveram que aprender a determinar o centro e a amplitude do ângulo assim como a fazer a sua representação sobre a figura: este tipo de aprendizagem nem sempre foi fácil uma vez que era preciso aprender a "*ver*" sob uma determinada forma matemática a figura seleccionada. Depois de em grupo terem negociado e decidido quais as figuras que ilustrariam o cartaz e que fossem esclarecedoras da informação e conteúdos matemáticos a veicular tiveram que as dispor de uma forma que fosse visualmente esclarecedora e apelativa: para isso experimentavam diversas posições sobre a cartolina. Decididas as posições na cartolina tinham de elaborar o cartaz. Os cartazes e portefólios que tinham sido elaborados na sala de aula de Matemática seriam expostos a público perante todos os elementos da comunidade educativa, em local previamente combinado junto de outros elementos que ilustrariam o "Dia da Matemática e da Informática" constante do Plano de Actividades da Escola. Assim, os produtos finais do trabalho de projecto "As rotações estão em toda a parte" poderiam ser observados e admirados pelos colegas de outras turmas e pelos restantes professores e pelos pais que quisessem visitar a exposição. Da mesma forma cada turma e seus alunos poderiam admirar os cartazes elaborados pelas outras turmas do 9º ano da Escola A.

Apesar de estar previsto que poderia haver cartazes que não seriam expostos decidiu-se (o grupo de professores de Matemática do 9º Ano da Escola A) que todos os trabalhos seriam expostos até para valorizar o esforço e empenho de todos os grupos das turmas de matemática. Mais do que ser expressão do trabalho matemático realizado na disciplina de matemática a exposição dos cartazes pretendeu sensibilizar os restantes alunos (que não do 9º ano) que a Matemática também pode ser objecto de admiração a partir dos objectos do nosso dia-a-dia: aí houve professores que tendo algum interesse em tapetes de Arraiolos puderam admirar imagens que lhes interessavam e perceber que elas podiam ser tratadas na Matemática; os professores de artes puderam admirar a obra de M. C. Escher a partir das figuras que os alunos seleccionaram para os seus cartazes: de um modo geral tratou-se e levou-se para fora da sala de aula conteúdos, temas e produtos realizados no âmbito da Matemática.

6.2 Descrição da avaliação formativa e o *feedback*

A avaliação das aprendizagens é um processo sistemático e deliberado de recolha de informação destinada à formulação de um juízo necessário com base em critérios (explícitos ou não) para a tomada de decisões sobre o ensino, sobre a aprendizagem e sobre a própria avaliação que podem ser comunicadas através do *feedback* (escrito, oral ou não verbal).

A avaliação formativa realizada foi feita com base na recolha de informação escrita correspondente a produtos finais de actividades realizadas sob proposta de tarefas diferenciadas e com base na recolha de informação proveniente da observação directa. Esta informação permitia à professora investigadora formular juízos sobre a(s) aprendizagem(ns) realizada(s) pelos alunos identificando alguns obstáculos inerentes a dificuldades particulares e pessoais e/ou de grupo quer relativamente a conhecimentos/conteúdos e processos matemáticos quer relativamente a outros aspectos provenientes das formas de trabalho menos adequadas (quer pessoais quer de grupo). As apreciações eram comunicadas aos alunos através das diferentes formas de *feedback*: na forma de *feedback* escrito nos relatórios e produtos finais obtidos pela realização das tarefas propostas; enquanto os alunos desenvolviam a actividade proporcionada pelas tarefas propostas a professora investigadora interpelava os alunos dando *feedback* oral e não verbal no sentido de reorientar a actividade na sala de aula para uma melhor centração na aprendizagem matemática e nas actividades lectivas. Das apreciações realizadas pela professora investigadora e caso considerasse ser pertinente envolver directamente os pais/encarregados de educação a mensagem era registada no caderno diário/caderneta e solicitada a assinatura de conhecimento da mensagem enviada. Esta última situação era rara mas acontecia como último recurso quando a professora investigadora já tinha implementado diferentes estratégias e não tinham proporcionado mudança de atitude nos alunos no sentido de se envolverem activamente na aprendizagem necessária.

6.2.1 Descrição da avaliação das tarefas implementadas

Na avaliação implementada, desde 2002/2003, para além dos testes tradicionais eram desenvolvidas, tarefas de avaliação/aprendizagem em que os produtos finais podiam ter várias formas que eram consideradas na avaliação final dos alunos. No entanto, as tarefas de avaliação e aprendizagem realizadas no 3º Período, em 2004/2005, que foram realizadas em grupo (os grupos mantiveram-se fixos durante todo o ano de 2004/2005), em muito maior número e de forma mais sistemática, foram uma característica distintiva da abordagem e gestão curriculares implementadas. Os alunos, até então, trabalhavam em grupo de forma esporádica. No 3º período do ano 2004/2005 foram submetidos de forma sistemática e contínua a um conjunto de tarefas de aprendizagem (cujos dados eram usados para avaliar as aprendizagens dos alunos em termos de competências de trabalho e em termos de apropriação e uso de conhecimentos matemáticos) e de avaliação realizadas essencialmente em grupo e o desenvolvimento curricular evoluiu a partir do trabalho dos alunos. O *feedback* registado de forma escrita era proporcionado aos alunos nos produtos finais das tarefas de avaliação e aprendizagem através de uma expressão (não satisfaz, satisfaz, satisfaz+, bom- e bom) e de uma apreciação da qualidade do processo desenvolvido, da adequação do trabalho dos elementos do grupo, de aspectos que precisavam de melhoria, etc.

Conforme se teve oportunidade de referir no ponto 6.1. – as aulas foram centradas na realização de tarefas que proporcionaram experiências matemáticas diversificadas (com diferentes naturezas - problemas, investigação, experimentais, etc.) com recurso a materiais manipuláveis diversos e à calculadora, investindo no trabalho de grupo, trabalhando a comunicação matemática e recorrendo a instrumentos de avaliação diversificados para além dos testes tradicionais. Durante as aulas e actividades lectivas era proporcionada uma avaliação mais informal e imediata que permitia ajustar atitudes, comportamentos e contornar alguns obstáculos de aprendizagem. De todas as tarefas implementadas no 3º período foram recolhidos relatórios das actividades como produtos a serem analisados e avaliados. A análise permitiu tomar contacto com as dificuldades que os grupos iam tendo na execução das actividades realizadas. Também foram considerados, formalmente, para a avaliação final do 3º período dois produtos, cartaz e portefólio, do trabalho de projecto implementado e desenvolvido ao longo do 2º período e concluído no 3º período.

O trabalho de projecto foi realizado de tal forma que cada grupo trabalhasse o tema, centrado em diferentes aspectos da realidade, a saber: monumentos, calçadas, tapetes (Arraiolos), as pavimentações de M. C. Escher, tipo de jantes, tipo de cruzes, azulejos e frisos. O trabalho de projecto realizado em diferentes momentos do 2º período quer dentro da sala de aula (o trabalho de grupo para a elaboração do cartaz e do seu conteúdo no que respeita a opções e tomadas de decisão pelos elementos do grupo) quer fora (tomar contacto com o tema das rotações e recolha de imagens em revistas, na *internet*, em diferentes tipos de documentos, ou a recolha de fotografias de elementos presentes na cidade quer em monumentos quer em elementos arquitecturais, de fachadas e de azulejaria). O cartaz tinha como objectivo primordial apresentar em exposição, integrada em actividade da escola, ”Dia da Matemática e da Informática”, o tema das rotações a toda a comunidade educativa de forma a que fosse suficientemente esclarecedor do ponto de vista dos conhecimentos de matemática relativos às rotações e visualmente apelativo. O portefólio teria como finalidade a recolha sistemática de imagens (recortes, fotografias, *downloads* da *internet*) interessantes e que se constituísse como recurso para elaboração do cartaz. Estes dois elementos produzidos em grupo só foram considerados como elementos de avaliação formal e final no terceiro período uma vez que seriam apresentados publicamente no início do 3º período. Apresentam-se, na Tabela 6.18, os momentos e as aulas em que o trabalho de projecto foi objecto de estudo, recolha e tomada de decisões.

Período		Acções realizadas na aula	Papel da professora (e avaliação formativa)
2º P	aula 1	Lançamento do Trabalho de Projecto sobre "As rotações estão em toda a parte": 1)formação dos grupos com recurso à Calculadora Gráfica e à função de geração *pseudo-aletória* de números inteiros correspondentes aos alunos da turma; 2)atribuição aletória dos temas a explorar por cada grupo através do método de retirar, sem reposição.	1)Liderar a formação de grupos com recurso à calculadora gráfica e fazer os ajustes de forma a ficarem conjuntos de alunos equilibrados. 2)O recurso à retirada sem reposição como forma de distribuição dos temas de forma a que cada grupo aceitasse o tema que lhe calhou; a professora poderia aceitar, nalguns casos, a substituição de um dos temas por outro alternativo não pensado previamente.
	aula 2	Trabalho de Projecto - o grupo deveria analisar as imagens arquivadas em portefólio do grupo e que cada elemento tinha recolhido e verificar da sua adequação e começar a fazer opções: 1)verificar as imagens, recortes, revistas com que cada aluno (3 a 4 por cada aluno) tinha contribuído; 2)seleccionar as imagens, recortes cujas características poderiam facilitar a identificação e *demonstração* da existência de rotações nas figuras identificando o centro de rotação e a amplitude do ângulo de rotação.	Orientar o trabalho dos grupos no sentido de esclarecer com os alunos se as imagens seleccionadas continham elementos de rotações e se eram suficientemente esclarecedoras ou não. Verificar e propor alternativas nos grupos que tiveram dificuldades de encontrar imagens em revistas e/ou na pesquisa realizada na internet : 1) facultar revistas, livros de arte (ajulejaria, monumentos, da obra de M. C. Escher, revistas de tapetes de arraiolos,...) e materiais alternativos para os alunos fazerem a procura e recolha de imagens; 2) disponibilizar na escola um espaço onde os alunos pudessem tirar cópias a cores (com recurso ao scan da mediateca).
3º P	aula 3	Trabalho de Projecto: o grupo deveria fazer o ponto da situação do trabalho realizado: 1) apresentando um esquema prévio das opções tomadas para discussão com a professora; 2)elaborar o cartaz onde deveriam figurar alguns elementos obrigatórios. Na parte da frente: tema; 2 ou 3 imagens, com impacto visual, onde estariam identificados o centro e o ângulo de rotação; a turma e os elementos do grupo. No verso do cartaz deveriam figurar as fontes e referências bibliográficas.	1) discutir e problematizar com os alunos, por grupos, os esquemas prévios dos cartazes e a informação gráfica ou escrita (em termos de conhecimentos matemáticos) que deveriam acrescentar para clarificar a existência de rotações ao público em geral da comunidade educativa; 2)apoiar a execução do cartaz problematizando algumas opções gráficas (trabalhadas anteriormente em Educação Visual).
	aula 4	Elaboração do cartaz e organização do portefólio	Apoiar e supervisionar a execução do cartaz e portefólios nos aspectos relativos (o 9º E não teve esta aula) : 1) aos conhecimentos matemáticos específicos relativos às Rotações; 2) aos aspectos gráficos do cartaz; 3) à organização final do portefólio;
	aula 5	Recolha dos produtos finais do trabalho de projecto "As rotações estão em toda a parte": (1) cartaz; (2) portefólio.	Recolher os produtos finais do Trabalho de projecto: 9º A e 9º B - (1) e (2) e 9º E - (1)

Tabela 6.18: Avaliação formativa nos diferentes momentos de Trabalho de Projecto

Passaremos de seguida a explicitar as avaliações realizadas, por turma e por grupo. Em cada grupo e em cada tarefa aparece explicitado o nome do aluno com a função de secretário (relembre-se que esta função era rotativa de forma a permitir que cada aluno pudesse desenvolver competências de comunicação escrita em responsabilidade e com respeito pelo trabalho desenvolvido dentro de cada grupo). A Tabela 6.19, Tabela 6.20 e Tabela 6.21 apresentam a avaliação formativa praticada nos diferentes grupos a partir dos produtos finais recolhidos quer do trabalho de projecto "*As rotações estão em toda a parte*" quer das tarefas que também foram de aprendizagem (tarefas de 1 a 7 conforme foram apresentadas no ponto 6.1): a recolha de informação relativa às tarefas de aprendizagem referidas foi feita através de relatórios, de observações mais ou menos estruturadas, umas mais formais e outras mais informais e de trabalhos e produtos de diversas naturezas realizados pelos alunos. A recolha de todos estes elementos para avaliação está em coerência com a valorização da diversidade de tarefas, recursos e estratégias nas tarefas de aprendizagem (ver quadro 7.3 do item 7.1.2.3) para assim melhor desenvolver a diversidade de competências (ver Gráfico 7.1 do item 7.2.1) e conhecimentos integrados nas opções do currículo moldado (Gimeno-Sacristán, 2000). Conforme se pode depreender das tabelas abaixo a recolha dos elementos de avaliação relativos às tarefas de aprendizagem no formato de trabalho de grupo foi realizada em momentos e tempos e em contextos diversificados, ao longo do período escolar. As tarefas, conforme já se apresentou no ponto 6.1, centravam-se em conhecimentos e processos matemáticos considerados fundamentais no domínio da Geometria: as três primeiras no âmbito da trigonometria; a Tarefa 3 teve como objectivo a construção de um astrolábio e a sua utilização na medição de objectos de alturas inacessíveis no pátio da Escola A; a Tarefa 4 tinha como intenção *(re)visitar* conceitos fundamentais da geometria; a Tarefa 5 consistiu na construção de um tronco de cone a partir da resolução de um problema; a tarefa 6 centrava-se na posição relativa de rectas e planos a partir de elementos de figuras prismáticas e piramidais; por fim, a Tarefa 7 tinha como objecto a introdução à geometria como construção hipotético dedutivo. Assim, o *feedback* disponibilizado de forma informal (oral e não verbal) ao longo das actividades lectivas e a partir dos registos escritos nos produtos finais dando conta tanto dos progressos e sucessos como das dificuldades e insucessos permitia que os alunos, em tempo útil, pudessem perceber e ajustar o respectivo comportamento ao trabalho de grupo e à aprendizagem matemática solicitada. Nas tabelas e relativamente às tarefas identificar-se-á o nome do aluno que secretariou o trabalho de grupo, a expressão da avaliação qualitativa realizada e ainda se há registos escritos relativos: (1) apreciação de aspectos organizacionais do trabalho desenvolvido pelo grupo; (2) apreciação de aspectos do conhecimento matemático específico (métodos, conhecimentos, processos, competências específicas, etc.).

Da observação da Tabela 6.19, relativa aos elementos de avaliação recolhidos no 9º A, podemos constatar que dos 49 produtos finais recolhidos das tarefas há:

i. apenas 7 relatórios que não possuem qualquer tipo de apreciação (sobre a organização/forma de trabalho ou sobre o desempenho matemático);
ii. apenas 1 relatório, exclusivamente, com apreciação da organização/forma de trabalho;

iii. 13 relatórios com os dois tipos de apreciação (sobre da organização/forma de trabalho e sobre o desempenho matemático);

iv. 28 relatórios, exclusivamente, com apreciação sobre o desempenho matemático;

v. Os alunos Pedro (primeiro grupo na tabela), Diogo Fontoura (terceiro grupo na tabela), João Jorge, António Vilela (quinto grupo na tabela) e Tiago Pereira (penúltimo grupo na tabela) nunca secretariaram.

Data	**Início de 3º Período**		**21-Abr**	**28-Abr**	**02-Mai**	**12-Mai**	**23-Mai**	**30-Mai**	**02-Jun**
Tarefa	**Trabalho de Projecto - Rotações**		**Tarefa 1**	**Tarefa 2**	**Tarefa 3**	**Tarefa 4**	**Tarefa 5**	**Tarefa 6**	**Tarefa 7**
9º A	**Cartaz**	**Portefólio**							
João Santos Ricardo Helder Rui Pedro Pedro	***Calçada*** Bom	Bom	**João** Bom (1) e (2)	**Rui** Bom	**Ricardo** Bom	**Ricardo** **Rui** Bom (1)	**João** Bom (2)	**Rui** Satisfaz (1) e (2)	**João** Satisfaz (2)
Mafalda Tiago Filipe Cristóvão Diogo Pereira	***Tapete*** Satisfaz	Bom	**Filipe** Bom (2)	**Mafalda** Satisfaz+ (2)	**Diogo** Satisfaz (1) e (2)	**Diogo** **Filipe** Bom (2)	**Tiago** Satisfaz+ (2)	**Diogo** Satisfaz + (2)	**Diogo** **Filipe** Satisfaz + (2)
Diogo Fontoura Maria João Ricardo Santelmo Filipe Montes	*Monumentos* Bom	Bom	**Maria** Bom	**Filipe** Bom (2)	**Ricardo** **Santelmo** Satisfaz+ (2)	**Maria** Bom (1) e (2)	**Ricardo** **Santelmo** Bom	**Maria** Bom (2)	**Maria** Satisfaz+ (2)
Ana Isabel André Noya José Miguel	***Frisos*** Bom	Bom-	**José** Satisfaz+ (2)	**Miguel** Bom (2)	**André Noya** Bom	**Miguel** Bom (1) e (2)	**Miguel** Satisfaz (2)	**Ana** Bom (2)	**Miguel** Satisfaz+ (2)
Ana Sofia António João Jorge Paulo Renato	***Escher*** Bom	Bom-	**Ana Sofia** Satisfaz+ (2)	**Ana Sofia** Satisfaz (2)	**Paulo** Satisfaz+ (2)	**Ana Sofia** Satisfaz (1) e (2)	**Paulo** Satisfaz (1) e (2)	**Ana Sofia** Satisfaz (2)	**Paulo** Não **S**atisfaz (1) e (2)
Daniela Margarida Ricardo Resende Tiago Pereira	***Azulejos*** Bom	Bom-	**Ricardo** Bom	**Daniela** Bom	**Margarida** Não Satisfaz (2)	**Daniela** **Ricardo** Bom (2)	**Daniela** Satisfaz (1) e (2)	**Margarida** Satisfaz (1) e (2)	**Daniela** Satisfaz (2)
Helena Mariana Álvaro André	***Jantes*** Satisfaz +	Bom	**Helena** Satisfaz+ (2)	**Mariana** Satisfaz (2)	**Álvaro** Bom (2)	**André** **Helena** **S**atisfaz (1) e (2)	**Mariana** Não Satisfaz (1) e (2)	**Helena** Satisfaz (1) e (2)	**Helena** Satisfaz (2)

(1) - apreciação sobre a organização/forma de trabalho (2) - apreciação sobre o desempenho matemático

Tabela 6.19: Avaliação formativa praticada nos diferentes grupos a partir dos produtos finais recolhidos na turma do 9º A

Nas cópias dos registos do *feedback* escrito nos relatórios produzidos pelos grupos em funcionamento pode ler-se

"*Porque é que o Filipe Montes e o Diogo Fontoura não secretariaram uma parte do trabalho?*

A brincadeira destes dois elementos e a sua falta de responsabilidade não contribuem para a respectiva aprendizagem!" (9º A, 12/05/2005 – grupo de Maria João, Ricardo Santelmo, Filipe Montes e Diogo Fontoura);

"*A contribuição do João Jorge e do António têm sido nulas ou mesmo contrárias ao bom funcionamento do grupo. Para além de não se interessarem estão na brincadeira ou a obstruir o funcionamento de outros grupos*." (9º A, 02/06/2005 – grupo da Ana Sofia, António, João Jorge e Paulo Renato).

Data	Início de 3º Período		21-Abr	26-Abr	28-Abr	10-Mai	24-Mai	31-Mai	02-Jun
Tarefa	Trabalho de Projecto - Rotações		Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4	Tarefa 5	Tarefa 6	Tarefa 7
9º B	**Cartaz**	**Portefólio**							
Rita Araújo Nuno Carvalho Tânia Azevedo	*Monumentos* Bom	Não entregou Não Satisfaz	**Nuno** Bom (2)	**Ana Rita** Satisfaz (2)	**Tânia** Bom	**Ana Rita** Bom (2)	**Nuno** Bom	**Tânia** Satisfaz+ (2)	**Ana Rita** Satisfaz
Beatriz Tânia Fábio	***Escher*** Bom	Bom	**Beatriz** Bom (2)	**Fábio** Bom (1) e (2)	**Beatriz** Bom (1)	**Tânia Fábio** Satisfaz (1) e (2)	**Beatriz** Bom	**Beatriz** Satisfaz + (2)	**Fábio** Satisfaz + (2)
Mariana Lígia André Paulo	***Tapetes*** Bom	Bom	**Mariana** Bom (1)	**Paulo** Bom (2)	**Lígia** Bom	**André** Satisfaz+ (2)	**Mariana** Bom- (2)	**Lígia** Bom	**Mariana** Satisfaz
Andreia Bruno Pedro Pinto	***Azulejos*** Bom	Satisfaz	**Pedro** Bom (1) e (2)	**Andreia** Bom (2)	**Pedro** Bom (1)	**Bruno** Satisfaz (1) e (2)	**Andreia** Satisfaz+ (2)	**Pedro** Não Satisfaz (2)	**Pedro** Satisfaz+
Rita Vaz Liliana Teresa	***Frisos*** Bom	Bom	**Teresa** Satisfaz (2)	**Rita** Satisfaz (1) e (2)	**Liliana** Bom (2)	**Teresa** Satisfaz (2)	**Liliana** Bom	**Teresa** Satisfaz (2)	**Rita** Satisfaz
Ana Odete Pedro Teixeira Tiago	***Calçadas*** Bom	Não Satisfaz	**Odete** Bom (2)	**Tiago** Bom (2)	**Pedro** Bom (2)	**Tiago** Não Satisfaz (2)	**Pedro** Satisfaz+ (2)	**Odete** Não Satisfaz (2)	**Tiago** Satisfaz (2)

(1) - apreciação sobre a organização/forma de trabalho (2) - apreciação sobre o desempenho matemático

Tabela 6.20: Avaliação formativa praticada nos diferentes grupos a partir dos produtos finais recolhidos na turma 9ºB

Da observação da Tabela 6.20, relativa aos elementos de avaliação recolhidos no 9º B, podemos constatar que dos 42 produtos finais recolhidos das tarefas há:

i. apenas 10 relatórios que não possuem qualquer tipo de apreciação (sobre a organização/forma de trabalho ou sobre o desempenho matemático);
ii. apenas 3 relatórios, exclusivamente, com apreciação da organização/forma de trabalho;
iii. apenas 5 relatórios com os dois tipos de apreciação (sobre da organização/forma de trabalho e sobre o desempenho matemático);
iv. 24 relatórios, exclusivamente, com apreciação sobre o desempenho matemático.

Na turma do 9º B todos os alunos secretariam pelo menos uma vez durante a abordagem curricular em foco.

Data	Início de 3º Período		27-Abr	02-Mai	04-Mai	16-Mai	25-Mai	31-Mai	01-Jun
Tarefa	Trabalho de Projecto - Rotações		Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3	Tarefa 4	Tarefa 5	Tarefa 6	Tarefa 7
9º E	Cartaz	Portefólio							
Patrícia Cátia José Eduardo Nuno Pinto	***Cruzes*** Bom	Os grupos não apresentaram portefólios e não foram considerados na avaliação final.	**Nuno** Satisfaz (1) e (2)	**Cátia** Bom (2)	**José Ed.** Satisfaz (1) e (2)	**Cátia Patrícia** Bom (1) e (2)	**Patrícia** Satisfaz (2)	**Nuno** Satisfaz+ (2)	**Nuno Cátia** Não Satisfaz (1)
Cláudia Marcos Tiago	***Frisos*** Bom-		**Marcos** Bom (1) e (2)	**Tiago** Satisfaz (2)	**Cláudia** Bom (2)	**Cláudia** Satisfaz (1) e (2)	**Tiago** Satisfaz (2)	**Cláudia** Bom (2)	**Tiago** Bom (2)
Ana Vieira Joana João Sousa Paulo	***Calçadas*** Bom		**Paulo** Bom (1) e (2)	**Joana** Satisfaz (1) e (2)	**João** Satisfaz+ (1) e (2)	**Joana João** Não Satisfaz (1) e (2)	**Joana João** Satisfaz (1) e (2)	**Joana Ana** Satisfaz (2)	**Ana** Satisfaz
Francisco Nuno Canadas Samuel Jorge	***Monumentos*** Bom		**Nuno** Bom (1)	**Jorge** Bom (2)	**Francisco** Bom	**Francisco** Não Satisfaz **Nuno** Satisfaz (1) e (2)	**Jorge** Satisfaz (1) e (2)	**Nuno** Bom (2)	**Francisco** Satisfaz (2)
Ana Cristina Carina Rui Yuan	***Tapetes*** Bom		**Rui** Bom (1) e (2)	**Carina** Bom (2)	**Ana** Bom	**Carina Yuan** Satisfaz (2)	**Ana** Satisfaz (1) e (2)	**Carina** Bom (2)	**Ana** Satisfaz (2)
Ana Sofia Márcia Vânia Wang	***Azulejos*** Bom		**Márcia** Bom (2)	**Vânia** Bom (2)	**Ana Sofia** Bom (2)	**Wang Márcia** Bom (2)	**Ana Márcia** Satisfaz- (2)	**Vânia** Bom (2)	**Márcia** Bom (2)
Ana Teresa Nuno Sampaio Pedro	***Escher*** Bom-		**Ana Ter.** Bom (2)	**Pedro** Satisfaz (2)	**Pedro** Bom (2)	**Nuno Pedro** Não Satisfaz (1) e (2)	**Nuno** Satisfaz (1) e (2)	**Ana Ter.** Não Satisfaz (2)	**Pedro** Satisfaz (2)

(1) - apreciação sobre a organização/forma de trabalho (2) - apreciação sobre o desempenho matemático

Tabela 6.21: Avaliação formativa praticada nos diferentes grupos a partir dos produtos finais recolhidos na turma 9º E

Da observação da Tabela 6.21, relativa aos elementos de avaliação recolhidos no 9º E, podemos constatar que dos 49 produtos finais recolhidos das tarefas há:

i. apenas 3 relatórios que não possuem qualquer tipo de apreciação (sobre a organização/forma de trabalho ou sobre o desempenho matemático);
ii. apenas 2 relatórios, exclusivamente, com apreciação da organização/forma de trabalho;
iii. 16 relatórios com os dois tipos de apreciação (sobre da organização/forma de trabalho e sobre o desempenho matemático);
iv. 28 relatórios, exclusivamente, com apreciação sobre o desempenho matemático;

Além destes 9 elementos de avaliação relativos a tarefas diversificadas, em formato de trabalho de grupo, foi realizado um teste tradicional sobre os conteúdos leccionados, realizado individualmente e considerado na avaliação do 3º período.

A avaliação formativa foi realizada em tempos e espaços diversificados e concomitantes com as experiências matemáticas de aprendizagem proporcionadas pela actividade desenvolvida. De acordo com Fernandes (2005: 81) a diversificação de métodos de recolha de informação permite avaliar mais domínios do currículo, lidar melhor com a grande diversidade de alunos presentes na sala de aula e também reduzir os erros inerentes à avaliação.

6.2.2 Papel e natureza do *feedback*

A comunicação e interacção entre os alunos e alunos e professor, numa sala de aula, sob diferentes formas assumem um papel fundamental. Os progressos e dificuldades dos alunos na aprendizagem podem ser melhor identificados na realização da actividade e experiência matemática proporcionadas por tarefas criteriosamente seleccionadas tendo em vista os objectivos, conhecimentos e competências a desenvolver. Como já foi referido anteriormente as tarefas de aprendizagem também eram de avaliação e o *feedback* foi usado, de forma escrita, oral e não verbal, para que a avaliação pudesse integrar os processos de ensino e de aprendizagem. O *feedback* foi usado de forma intencional, sistemática e continuada ao longo de todo o 3º Período de forma a que os alunos pudessem ser lembrados dos níveis de aprendizagem que precisavam alcançar, ficassem conscientes dos próprios progressos e aprendessem a rendibilizar o trabalho de grupo para potenciar a aprendizagem. Para viabilizar e equilibrar a distribuição do *feedback* durante a realização das tarefas preconizou-se que, de cada grupo, apenas fosse levado para análise um trabalho por grupo: de uma turma de 28 alunos haveria 7 trabalhos de grupo, por tarefa, para analisar. A regra institucionalizada de que a função de secretário, no grupo, era rotativa permitiu que a professora investigadora desse *feedback* dos trabalhos de grupo a cada elemento da turma pelo menos uma vez, na maior parte duas vezes e, nalguns casos, três vezes. De qualquer das formas o *feedback* dado aos grupos regularmente era dirigido aos elementos do grupo, de forma global referindo-se aos elementos fundamentais em análise: i) aos produtos da actividade, ii) aos processos de aprendizagem indicando pistas, estratégias para melhorar a aprendizagem no decurso da experiência de aprendizagem proporcionada, e iii) à forma de trabalho de grupo. A par do *feedback* avaliativo em que a professora investigadora formulava um juízo de valor através das expressões normalizadas, na sala de aula (não satisfaz, satisfaz e bom), era registado um *feedback* de alguma forma descritivo onde para além de se especificar o(s) progresso(s) realizados se apontavam pistas e indicações mais concretas de melhor adequação/ajuste para melhorar a aprendizagem com vista a que os alunos se tornassem mais autónomos para "*avaliarem e regularem os próprios desempenhos e para encontrarem maneiras de os melhorar*" (Fernandes, 2005: 85).

A professora investigadora apesar de ter a preocupação de devolver os relatórios com o respectivo *feedback* nem sempre conseguiu fazê-lo da forma mais adequada em todas as turmas conforme podemos constatar pela seguinte transcrição:

> *Eu, no 9º E tenho estado em cima do acontecimento e isto também porque eles são os últimos a fazer as experiências e tenho estado em cima da hora sempre a entregar-lhes, eles têm tido o feedback de tudo o que fazem e em simultâneo.*
> *Depois no 9º B, nesta turma, há uma parte que já entreguei e outra parte que desde o dia 17 que ainda não entreguei, que ainda não fiz o feedback!*
> *E depois no 9º A, isso então é que é uma desgraça! Nunca entreguei nada de volta! E isso tenho que entregar! Vou tentar ainda fazer neste fim-de-semana para lhes entregar. Para lhes dar!*
> *Mas eu creio que as dinâmicas com o entregar logo, o entregar muito depois ou entregar muito, muito depois, as coisas são diferentes e também acho que isso influencia o trabalho, e o empenhamento dentro na sala de aula ...mas eu não consigo ...* in Conferência entre a professora investigadora e a *critical friend* (6ª aula do 9º B).

Passar-se-á a apresentar alguns excertos do *feedback* descritivo e escrito registado nas produções dos alunos e nas duas dimensões consideradas: forma de trabalhar dos alunos e trabalho matemático realizado.

Forma de trabalhar

"Era importante que todos os elementos do grupo estivessem atentos e concentrados na tarefa a realizar" (9º E, 27/04/2005 - grupo Ana Cristina, Carina Miranda, Rui Ferreira, Yuan);

"À Joana e ao grupo,

a função de secretário(a) tem de ser desempenhada com responsabilidade sob proposta dos restantes elementos do grupo: uma das formas é cada elemento ir resolvendo, no seu caderno, para se controlar…" (9º E, 03/05/2005 - grupo Ana Vieira, Joana Teixeira, João Sousa e Paulo Evangelista);

"Vê-se que o grupo se empenhou…

No entanto, creio que têm de congregar esforços para ultrapassarem as dificuldades!" (9º E, 20/05/2005 – grupo de Marcos, Cláudia e Tiago)

"Creio que o grupo não levou a sério a tarefa proposta. Não trabalhou em grupo nem a pares e as aprendizagens ficaram por realizar!..." (9º E, 20/05/2005 – grupo da Ana Vieira, Joana, Paulo, João);

"Creio que o Nuno se aplicou reduzidamente. O grupo não se concentrou no trabalho a realizar, brincando. Espero que mudem de atitude e se empenhem nas tarefas propostas." (9º E, 20/05/2005 – grupo da Ana Teixeira, Pedro e Nuno Sampaio);

"Creio que houve pouco empenho na realização da tarefa proposta…" (9º E, 25/05/2005 – grupo da Ana Martins, Carina, Rui e Yuan);

"Sente-se que, no grupo, há uma certa desorganização que não ajuda no trabalho…

O trabalho aparece no rascunho mas quem passou o relatório [secretária – Ana Vieira] esqueceu-se ou não se apercebeu!" (9º E, 25/05/2005 – grupo da Ana Vieira, Joana, Paulo, João);

"O trabalho num grupo precisa de bastante organização sob pena de não se rendibilizar o tempo e de se perder a oportunidade de se aprender…." (9º E, 25/05/2005 – grupo da Ana Teixeira, Pedro e Nuno Sampaio);

"[…]Gostei da discussão gerada no grupo. Também gostei da atitude do João a tentar, pelos seus próprios meios, tentar dar resposta ao problema proposto." (9º A, 21/04/2005 – grupo do João Santos, Ricardo Hélder, Rui Pedro e Pedro Pinto);

"A concentração e atenção nos trabalhos são fundamentais." (9º A, 02/05/2005 – grupo do Diogo Pereira, Filipe Cristóvão, Mafalda e Tiago);

"Verifiquei que trabalharam de forma muito empenhada e interessada. Parabéns ao André: nunca o vi a trabalhar tanto como nesta aula!" (9º A, 12/05/2005 – grupo do Álvaro, André Mota, Helena Guedes e Mariana Taveira);

"Porque é que o Filipe Montes e o Diogo Fontoura não secretariaram uma parte do trabalho? A brincadeira destes dois elementos e a sua falta de responsabilidade não contribuem para a respectiva aprendizagem!" (9º A, 12/05/2005 – grupo de Maria João, Ricardo Santelmo, Filipe Montes e Diogo Fontoura);

"Qual foi o trabalho do André Noya e do José?" (9º A, 12/05/2005 – grupo do José, André Noya e Miguel China);

"O comportamento do Álvaro normalmente está muito desadequado. O André esteve pouco empenhado e a Helena, nesta aula, teve dificuldades de concentração." (9º A, 23/05/2005 – grupo do Álvaro, André Mota, Helena Guedes e Mariana Taveira);

"A contribuição do João Jorge e do António têm sido nulas ou mesmo contrárias ao bom funcionamento do grupo. Para além de não se interessarem estão na brincadeira ou a obstruir o funcionamento de outros grupos." (9º A, 02/06/2005 – grupo da Ana Sofia, António, João Jorge e Paulo Renato);

"Esta era a vez do Bruno secretariar e não a do Pedro. Atenção a esta exigência." (9º B, 28/04/2005 – grupo do Pedro, Andreia e Bruno);

"Andreia, Bruno e Pedro, têm de se organizar para que o trabalho de grupo vos renda…" (9º B, 10/05/2005 – grupo da Andreia, Bruno e Pedro)

"Têm de rendibilizar o vosso trabalho e de conversar menos." (9º B, 10/05/2005 – grupo do Tiago, Odete e Pedro." (9º B, 10/05/2005 – grupo do Tiago, Ana Odete e Pedro)

Trabalho matemático a realizar

"São precisas respostas completas" (9º E, 27/04/2005 - grupo Ana Teixeira, Nuno Sampaio, Pedro Silva);

"Como chegaram a esta conclusão? As afirmações feitas devem ser justificadas e/ou fundamentadas" (9º E, 03/05/2005 - grupo da Cláudia, Marcos e Tiago).

Perante a conclusão do grupo: "Os valores são todos diferentes" a professora comenta:

"Será que faz sentido haver valores tão diferentes?" (9º E, 04/05/2005 - grupo da Cláudia, Marcos – o Tiago faltou)

"Faz sentido haver uma discrepância tão grande nas medições?" (9º E, 04/05/2005 - grupo da Vânia, Márcia, Sofia e Wang)

"Como se calcula a área de um pentágono? (polígono regular?)" (9º E, 20/05/2005 – grupo da Ana Martins, Carina, Rui e Yuan);

"Creio que têm de estudar a posição relativa entre 2 planos e entre um plano e uma recta." (9º E, 30/05/2005 – grupo da Ana Teixeira, Pedro e Nuno Sampaio);

"Os planos representam-se pelas letras de 3 pontos do plano [não colineares] sem qualquer símbolo adicional…
As rectas representam-se pelas letras de 2 dos seus pontos sem qualquer símbolo adicional.
Atenção: -confundem perpendicularidade com ser oblíquo;
-não têm claro a simbologia convencionada" (9º E, 30/05/2005 – grupo da Ana Vieira, Joana, Paulo, João)
"Atenção: As rectas representam-se pelas designações de dois quaisquer dos seus pontos - letras "latinas" maiúsculas sem qualquer outro símbolo" (9º E, 30/05/2005 – grupo da Ana Martins, Carina, Rui e Yuan);
10. O quociente depende das medidas dos lados a não ser que aumentem segundo a mesma razão, porque o quociente seria diferente se as medidas fossem alteradas incorrectamente.
"Sim claro que depende…
No entanto a invariância dos quocientes tem a ver com os ângulos que são iguais." (9º A, 21/04/2005 – grupo do João Santos, Ricardo Hélder, Rui Pedro e Pedro Pinto)
Não podemos tirar conclusões porque as medições estão mal feitas.
"Possivelmente houve erros nas medições… Apresentação dos cálculos?" (9º A, 02/05/2005 – grupo do Diogo Pereira, Filipe Cristóvão, Mafalda e Tiago);
"Precisam de aprender a calcular áreas, perímetros e volumes" (9º A, 12/05/2005 – grupo do Álvaro, André Mota, Helena Guedes e Mariana Taveira);
"Precisam de trabalhar a demonstração." (9º A, 02/06/2005 – grupo da Ana Sofia, António, João Jorge e Paulo Renato);
"Lígia, Mariana, Paulo e André, -os cálculos?; -têm as planificações cuidadas; -precisam de estudar sobre a determinação de eixos de simetria e aprender a calcular áreas e volumes." (9º B, 10/05/2005).

6.2.2.1 O *feedback* em grupos

Neste item apresentar-se-á na Tabela 6.22 relativa ao grupo da Beatriz, Fábio e Tânia Resende, do 9º B, na Tabela 6.23 relativa ao grupo da Cátia, José Eduardo, Nuno Pinto e Patrícia do 9º E e a Tabela 6.24 relativa ao grupo do Francisco, Jorge, Nuno Canadas e Samuel do 9º E o *feedback* escrito nos relatórios de trabalho de grupo relativos à resolução das tarefas implementadas.

Grupo da Beatriz, Fábio e Tânia Resende, 9º B

Neste grupo a Beatriz que é uma aluna interessada e preocupada com o seu aproveitamento não tem grande confiança nos seus colegas de grupo: manifesta-o quando põe em causa a função de secretário referindo-se à letra do Fábio como sendo pouco legível. A Beatriz contorna esta falta de confiança tentando centralizar o trabalho matemático em si. O Fábio, por sua vez, explicita a sua falta de auto-estima e de auto confiança. Nesta situação e, de uma forma indirecta, a professora explícita a sua confiança em todos os alunos da turma (não só no Fábio) mas em todos pela sua condição de alunos como aprendentes e responsáveis pelas funções atribuídas incluindo a de secretário. Isto é, a professora explicita e manifesta confiança e expectativas altas não só relativamente ao Fábio como ao grupo em que estava integrado: todos estavam na sala de aula para aprender e o trabalho de grupo era uma forma estratégica de trabalhar para influenciar a experiência matemática. Na aula (em 26/04) o Fábio secretariou e houve esforço dos elementos do grupo e o relatório final estava bem estruturado e perceptível. O Fábio não só secretariou nessa aula de trabalho de grupo como em mais duas outras. A Tânia, aluna que estava pela segunda vez no 9º ano e pela primeira vez nesta turma apenas secretariou uma vez e a Beatriz quatro vezes. Apesar da Beatriz ter um comportamento dominante, sendo secretária quatro vezes (em sete no total) – ver Tabela 6.20, houve uma distribuição de tarefas ao longo do período de intervenção.

	Feedback dado pela professora de forma escrita		
Assunto **(data)** Classificação	Forma de trabalhar	Trabalho matemático	Incidentes na aula
Razões trigonométricas **(21-04-2005)** Bom		É importante esclarecer, em cada questão, do que estamos a falar… Atenção à simbologia…	
Relação entre as razões trigonométricas **(26-04-2005)** Bom	Parabéns ao grupo que conseguiu gerir o seu trabalho. Parabéns ao Fábio pelo seu esforço!	As respostas devem ser dadas de forma clara e completa	"Chamei-os à atenção de que o secretário deveria (teria) de mudar. Nesta altura a Beatriz chamou-me ao grupo e colocou-me o problema de que a letra do Fábio não era muito peceptível. Respondi-lhe que estava habituada a ler a sua letra e que isso não constituiria uma impossibilidade para mim. Depois, acrescentei, a mudança e rotatividade do secretário tinha a ver com a necessidade de todos os alunos melhorarem a sua capacidade de escrita a matemática e não com a letra ser ou não bonita. Por outro lado o grupo deveria aprender a confiar em todos os seus elementos como capazes dessa tarefa. Nesta altura o Fábio pediu para falar e disse: "Oh professora, mas eu não confio em mim!" "Ah! Mas eu confio em ti e sei que és capaz. Também sei que te vais esforçar para ter uma melhor apresentação e o grupo vai estar atento para perceber se tudo o que escreves é mesmo aquilo que o grupo quer que escrevas." Nesta altura o Fábio assumiu o seu papel de secretário e o grupo assumiu que ele seria o seu secretário." in diário de turma
Determinação de alturas de objectos inacessíveis com recurso ao astrolábio **(28-04-2005)** Bom	Atenção: é importante que se respeite a vez do secretário. Esta era a vez da Tânia e não da Beatriz!		"
Noções básicas de geometria **(10-05-2005)** Satisfaz	Beatriz, Fábio e Tânia: precisam de ser mais organizados e decididos no trabalho.	Beatriz, Fábio e Tânia: Fizeram as planificações de forma cuidada... No entanto têm de investir em aprender - o cálculo de áreas e volumes; - a determinação de eixos de simetria quer no plano quer no espaço;	
Construção do tronco de cone **(24-05-2005)** Bom			
Rectas e planos: relação de paralelismo e perpendicularidade **(26-05-2005)** Satisfaz +		BG é aposta ao plano BCG. HG e AE são não complanares...	
Referência à geometria como construção hipotético-dedutiva **(02/06/2005)** Satisfaz+		Rectas concorrentes...	

Tabela 6.22: Avaliação formativa no grupo da Beatriz, Fábio e Tânia, 9º B

Grupo da Cátia, José Eduardo, Nuno Pinto e Patrícia, 9º E

O José Eduardo manifesta ao longo de todo o trabalho desenvolvido dificuldades de adequação comportamental à dinâmica de grupo, em particular, e à dinâmica de trabalho na sala de aula de matemática (observar a Tabela 6.23). Esta dificuldade do José Eduardo associada à dificuldade dos outros elementos do grupo gerirem a relação com ele salvaguardando o trabalho matemático vai atingir um ponto alto de disfuncionamento desembocando em violência física. Entretanto analisemos a evolução comportamental do grupo por aula:

1ª aula – o grupo realiza o trabalho mas, pelo facto de ter trocado as designações dos vértices do triângulo, o produto final não pode ser usado como os restantes na turma. A professora chama a atenção e explicita ao grupo que deve trabalhar melhor e responsabiliza-o por isso.

2ª aula – o grupo entra em conflito (concretizando-se em violência física entre o José Eduardo e o Nuno Pinto) pelo facto do José Eduardo não estar a trabalhar mesmo depois de ter sido chamado à atenção, várias vezes, pelo Nuno Pinto. Tanto o José Eduardo como os restantes elementos do grupo propuseram a retirada do José Eduardo do grupo. A professora mantém o José Eduardo afastado fisicamente do restante grupo e em reflexão acerca dos acontecimentos, durante o resto da aula. No fim da aula chama todos os elementos do grupo: esclarecendo a situação de violência vivida e o que a originou; interferindo, influenciando e solicitando pedidos de desculpas dentro do grupo; desafiando o grupo (e cada um dos seus elementos) a centrar-se no trabalho proposto na sala de aula e a realizar esforços deliberados na adaptação mútua por forma a realizarem as experiências matemáticas propostas; solicitando o compromisso individual e de grupo no trabalho matemático futuro; confiando no compromisso realizado por cada um e pelo grupo.

3ª aula – o grupo funcionou adequadamente: os diferentes elementos esforçaram-se, entreajudaram-se, produziram produtos intermédios de forma adequada; no entanto o relatório final ainda veio incompleto. A professora atenta ao processo de evolução vai fazendo chamadas de atenção ao secretário, José Eduardo, para se manter fisicamente no grupo, para registar no relatório o trabalho matemático realizado assim como a sua fundamentação incluindo as justificações. Apesar de tudo o relatório final é entregue incompleto.

	Feedback dado pela professora de forma escrita		
Assunto (data) Classificação	Forma de trabalhar	Trabalho matemático	Incidente na aula
Razões trigonométricas **(27-04-2005)** Satisfaz	"Têm de polarizar as vossas energias para o trabalho a fazer, distribuindo tarefas e apoiando o secretário"	Aqui as letras estão trocadas [as designações dos vértices do triângulo, tendo uma seta e apontando para os vértices dos triângulos em causa]… É preciso ser rigoroso nas medições	No início da aula o Nuno Pinto e o José vieram pedir-me para que pudessem trabalhar sozinhos sem os outros 2 elementos do grupo (Patrícia, Cátia). Esclareci-lhes que os grupos estavam formados e assim deveriam trabalhar. Os valores determinados pelo grupo não estavam correctos pelo facto de ter havido troca da designação dos vértices nas figuras construídas… (in diário de turma)
Relação entre as razões trigonométricas **(02-05-2005)** Bom		As respostas devem ser dadas de forma clara e completa	Houve tensões fortes dentro do grupo que levaram a violência física perpetrada entre o José e o Nuno devido à responsabilização do grupo e à não adequação comportamental do José. No fim da aula e em conversa com a professora todos os elementos do grupo se comprometeram a fazer um esforço individual para se adaptarem à dinâmica e exigências do trabalho de grupo. (in Conferências com a *critical friend*)
Determinação de alturas de objectos inacessíveis com recurso ao astrolábio **(04-05-2005)** Satisfaz	Creio que o grupo pode fazer mais e melhor e, para isso, todos têm de contribuir!...	Perante a conclusão do grupo: "Os valores são todos diferentes" a professora comenta: "É um facto que os valores são todos diferentes mas o que é que têm a dizer disso? Qual o valor mais aceitável? E porquê?	"[O grupo] funcionou bem como tinham prometido. O José foi o 1º a terminar o seu astrolábio. Também ele foi secretário. Depois de terminar o seu astrolábio foi ajudar os restantes elementos do grupo a terminar os astrolábios. No entanto quando saímos para o pátio o Nuno Pinto ainda não tinha terminado de construir o respectivo astrolábio. Disse-lhe para avançar que depois terminaria a sua construção. Também a Patrícia ainda não tinha dependurado o clip" in diário de turma "Mas ele disse a professora não sabe como se faz? Eu sei, mas eu quero que vocês registem como fizeram as coisas... Porque ele dizia-me: eu fui calcular a tangente à máquina, multipliquei pelo valor que encontrei e deu-me a altura. Então esse grupo, [,...] não viu que deixou uma coluna da tabela por preencher, e ficaram todos felizes e portanto deram-me aquilo assim e escreveram porque eu lhes disse: Atenção! Porque vocês têm de me apresentar os cálculos... Ele já andava fora do grupo e eu disse-lhe: Vai lá para o teu grupo e continua a escrever, ó José Eduardo! Mas mesmo assim, o relatório veio "pendurado", o relatório veio incompleto. ["Na conlusão assumiram que os valores eram diferentes mas não reflectiram o porquê, se era aceitável ou não, esse tipo de discrepâncias. Também me parece que as meninas desligam da responsabilidade do relatório" in diário de turma] Foi o único grupo que entregou o trabalho com a tabela incompleta. (in Conferências com a *critical friend*)
Noções básicas de geometria **(16-05-2005)** Bom	Sinto que se esforçaram… No entanto creio que, dentro do grupo, pode haver uma maior partilha de saberes e de conhecimento	O grupo tem de aprender: 1) Melhorar o cálculo de áreas; 2) Aprender a calcular volumes [de prismas e pirâmides]; 3) A determinar os eixos de simetria [de uma figura plana] e planos de simetria [de uma figura no espaço];	
Construção do tronco de cone **(25-05-2005)** Satisfaz		Área da coroa[circular]? Área do sector da coroa circular? Área total?	"O José Eduardo andava regularmente de pé e eu lembrava-lhe que deveria estar a trabalhar na sua carteira com o seu grupo." in diário de turma
Rectas e planos: relação de paralelismo e perpendicularidade **(31-05-2005)** Satisfaz +		Atenção às respostas completas…	
Referência à geometria como construção hipotético-dedutiva **(01/06/2005)** Não Satisfaz	O grupo continua a ter muita dificuldade em concentrar-se no trabalho… O José Eduardo está novamente distraído e a perturbar o trabalho do respectivo grupo e dos demais…		

Tabela 6.23: Avaliação formativa no grupo da Cátia, José Eduardo, Nuno Pinto e Patrícia, 9º E

4ª e 6ª aulas – não há referências especiais relativas ao grupo ainda que a professora registe no relatório que considera que o grupo pode trabalhar melhor.

5ª e 7ª aulas – há novamente referências ao comportamento desadequado do José Eduardo: o facto de sair do respectivo grupo durante o trabalho e interferindo com outros grupos.

Neste grupo há evidências de que a responsabilização pela realização das tarefas propostas é aceite, de um modo geral, pelos alunos do grupo: a violência física é um indicador de que essa responsabilidade foi aceite de formas diferentes. A resistência activa do José Eduardo à realização das tarefas propostas (ou porque não quer ou porque não sabe estar) vai condicionar (para o bem e para o mal) a dinâmica do grupo. As alunas Cátia e Patrícia tiveram uma actuação mais discreta no trabalho de grupo e no grupo. O comportamento exuberante do José Eduardo pode ter contribuído para delegar para segundo plano a actuação das alunas referidas até porque se mantinham nos respectivos lugares e a realizarem as tarefas propostas.

Grupo da Francisco, Jorge, Nuno Canadas e Samuel, 9º E

Neste grupo apresentar-se-á alguns incidentes que tiveram lugar de forma sequencial em aulas no formato de grupo ou não. Seguidamente será apresentada a Tabela 6.24 onde se reproduz o *feedback* escrito nos relatórios de trabalho de grupo relativos à resolução das tarefas implementadas. Por fim será apresentada uma análise do comportamento dos alunos Francisco e Samuel.

Incidente na aula de 27/04

"Coloquei no quadro, a giz, o número da actividade e a respectiva página.

Como o Francisco me pedisse a folha da tarefa chamei-lhe a atenção de que esta era do livro e que estava registada no quadro. […] Havia, no entanto, um grupo que não estava a trabalhar como tal: estavam presentes 3 dos 4 elementos do grupo - só o Nuno Canadas estava a trabalhar; o Samuel e o Francisco estavam na conversa. Cheguei perto do grupo e esclareci que mesmo que o produto do trabalho de grupo estivesse completamente correcto eu estava a observar o trabalho dos seus 3 elementos e caso não mudassem a sua atitude atribuiria a avaliação de não satisfaz ao TG porque este não estava a funcionar. O TG não se poderia resumir ao trabalho de um dos seus elementos; o TG era para todos e deveria ser resultante da participação activa de todos. Salientei ainda que os estava a esclarecer no início do trabalho (grupo) para poderem ajustar ao que era pretendido e para poderem mudar de atitude. Retorquiram que estavam a participar mas fiz questão de explicitar que eu pretendia que o TG fosse realizado por todos e não apenas por alguns elementos do grupo. [...]O Samuel referiu também que o Nuno Canadas tinha uma letra melhor e que poderia ser sempre o secretário. Esclareci-o que não pretendia que a função de secretário fosse sempre realizada pela mesma pessoa uma vez que o objectivo dessa função era que todos os elementos do grupo pudessem melhorar na comunicação escrita matemática pelo exercício da escrita. Mesmo que tivesse uma letra menos legível, o secretário deveria fazer um esforço para ser apresentável e clara e que, eu como professora, leria os relatórios" in diário de turma.

Incidente na aula de 02/05

Chamei várias vezes a atenção do Samuel que estava sistematicamente na conversa e o Francisco que não passava (na aula anterior mandei um recado para os pais a referir o comportamento desadequado deste aluno); verifiquei que a mãe tinha assinado e quando lhe perguntei o que tinha dito, disse-me que ela lhe tinha dito para passar as aulas e estar atento e que o tinha castigado não lhe deixando usar o computador quando lhe disse que ia mandar outro recado referiu-me que agora já não havia nada a tirar, que não tinha importância. [...] No final da aula enviei dois recados, um para o encarregado de educação do Samuel e outro para o encarregado de educação do Francisco" in diário de turma.

Incidente na aula de 09/05

[No dia 09/05 telefonei para o pai do Samuel e para a mãe do Francisco solicitando ajuda e esclarecendo o comportamento desadequado e postura faladora dos filhos e as possíveis consequências na aprendizagem].

O pai [do Samuel] percebeu qual a razão do meu telefonema, mostrou-se sensibilizado mas também cansado porque o filho que se dizia responsável não estava a cumprir. Que ia verificar o caderno e estar mais atento ao trabalho dele. Falei dos recados que estavam por assinar. À mãe do Francisco comecei por lhe dizer que, como já sabia que eu lhe tinha enviado noutro dia um recado... Aqui a mãe disse-me que não tinha conhecimento de nada (o Francisco estava nessa altura na preparação do crisma). Constatei, assim, que o Francisco tinha falsificado a assinatura da mãe e, que de manhã, me tinha mentido. Depois de conversarmos acerca das grandes capacidades do Francisco a mãe informou-me que este seu comportamento de querer trabalhar o mínimo, de ser muito falador já vem desde o 1º ciclo e que não lhe tem permitido desenvolver-se tanto quanto poderia. [...] A mãe mostrou-se muito preocupada com o filho. [...] Disse-me que lhe ia ver o caderno quando ele chegasse a casa" in diário de turma.

Incidente na aula de 11/05

"Nesta aula [11/05], onde todos os alunos estavam nos seus lugares e voltados para o quadro, o Francisco escreveu e registou todo o trabalho realizado. O Samuel esteve mais atento e participativo. Fiz saber ao Francisco que, no fim da aula, queria falar com ele e ele manifestou um desejo semelhante de vir falar comigo. O Francisco participou oralmente durante toda a aula e de forma activa e adequada: conseguiu identificar as razões trigonométricas para a determinação de medidas desconhecidas. No fim da aula o Francisco veio ter comigo e pediu-me desculpa pela sua atitude; que nunca mais faria isso. Aceitei as desculpas" *in* diário de turma.

	Feedback dado pela professora de forma escrita	
Assunto (data) Classificação	Forma de trabalhar	Trabalho matemático
Razões trigonométricas **(27-04-2005)** Bom	"Neste trabalho dou-vos o benefício da dúvida. No próximo trabalho quero-vos mais determinados na actividade proporcionada pela tarefa"	
Relação entre as razões trigonométricas **(02-05-2005)** Bom		Atenção à justificação das afirmações
Determinação de alturas de objectos inacessíveis com recurso ao astrolábio **(04-05-2005)** Bom		
Noções básicas de geometria **(16-05-2005)** Satisfaz (Nuno e Jorge) Não Satisfaz (Francisco e Samuel)	"**O Jorge e o Nuno Canadas** continuam a ter uma atitude adequada ao trabalho de grupo…. A responsabilidade de cada um é fundamental para o bom funcionamento do grupo… O **Francisco e o Samuel** não levaram muito a sério a tarefa proposta…."	**Jorge e Nuno**: O grupo tem de aprender 1) a apresentar os cálculos realizados; 2) a calcular perímetros, áreas e volumes; 3) a determinar planos e eixos de simetria; 4) a apresentar e a falar das regularidades de uma tabela… **Francisco e Samuel**: ... Onde estão os cálculos?
Construção do tronco de cone **(25-05-2005)** Satisfaz	"Parabéns! Apesar de incompleto o trabalho apresenta organização e está claro nas ideias…"	Cálculo do volume?
Rectas e planos: relação de paralelismo e perpendicularidade **(31-05-2005)** Bom		Atenção as rectas representam-se pelas designações de dois de quaisquer dos seus pontos - letras maiúsculas [do alfabeto] latino sem qualquer outro símbolo
Referência à geometria como construção hipotético-dedutiva **(01/06/2005)** Satisfaz		Segundo o axioma de Euclides podemos determinar um plano "pois há 3 pontos não colineres A, B e P. c.q.d."

Tabela 6.24: Avaliação formativa no grupo da Francisco, Jorge, Nuno Canadas e Samuel, 9º E

Análise centrada no comportamento do Francisco e do Samuel

O Francisco e o Samuel manifestam-se ao longo das aulas referidas de uma forma alheia e desinteressada enquanto que o Jorge e o Nuno Canadas de uma forma responsável e empenhada. Este comportamento díspar no grupo é alvo de intervenção da professora uma vez que todos os elementos do grupo deveriam ter uma atitude de intervenção activa na realização das actividades propostas nas tarefas. Passaremos a apresentar, de forma sintética e esquemática o processo de desenvolvimental dos alunos Francisco e Samuel.

1ª aula (27/04) – Samuel e Francisco estão alheios à realização da tarefa e mantêm-se na conversa sobre outros assuntos.

A professora depois de os ter chamado por diversas vezes a atenção e explicitou-lhes as razões da necessidade da rotatividade da função de secretário ao Samuel.

2ª aula (02/05) - Samuel e Francisco continuam faladores e pouco interessados no trabalho proposto.

A professora regista informações escritas nos cadernos diários para que os alunos em questão dêem conhecimento aos respectivos encarregados de educação.

3ª aula (04/05) – Nada a registar.

(09/05) - Samuel e Francisco não trazem os recados assinados pelos respectivos encarregados de educação e mantêm o comportamento desadequado.

A professora contacta telefonicamente os encarregados de educação do Samuel e do Francisco que se comprometem a falar e a reflectir acerca do comportamento na aula de matemática e a irem ler as informações registadas.

(11/05) – Registam-se mudanças no comportamento do Francisco e do Samuel com incidência especial mais positiva no Francisco.

4ª aula (16/05) – O grupo subdividido em dois grupos: o subgrupo do Samuel e do Francisco apresenta dificuldades em trabalhar adequadamente.

5ª aula (25/05) – A professora dá os parabéns ao grupo pela organização do relatório como produto final.

6ª e 7ª aulas – A professora já só faz alusões a aspectos do trabalho matemático no *feedback* escrito nos relatórios.

O Francisco e o Samuel, alunos que nunca tinham ficado retidos, apresentam dificuldades de atenção e de concentração na aula de matemática quer a dinâmica seja no grupo turma quer seja centrada no trabalho de grupo. Depois de várias vezes terem sido chamados a atenção, e não tendo alterado o respectivo comportamento, a professora investe a envolver, de forma mais directa, os pais e encarregados de educação informando-os do tipo de comportamento que vêm apresentando (em várias etapas acima descritas). O comportamento destes alunos ainda se tornava mais evidente quando se encontravam a trabalhar no grupo de 4 alunos.

6.2.3 Auto-avaliação no domínio do comportamento e atitudes

A avaliação de 3º período também considerou elementos de auto-avaliação dos alunos no domínio do comportamento e atitudes segundo uma ficha de preenchimento realizada por cada um, de acordo com a Figura 6.8. De seguida apresenta-se uma "Ficha de auto-avaliação dos valores/atitudes" que todos os alunos preencheram no final do período:

1. Pontualidade e Assiduidade

Não		Sim

2. Comportamento na sala de aula

Está distraído e/ou faz barulho prejudicando a aula	Na maioria das vezes está atento e não perturba	Contribui para um bom ambiente de trabalho

3. Colaboração com os colegas

Não colabora com os colegas	Por vezes colabora e ajuda os colegas	Colabora com os colegas ajudando-os a resolver dificuldades

4. Participação Oral

Não intervém e/ou fá-lo sem esperar a sua vez e/ou troça das intervenções dos colegas	Intervém esperando a sua vez de falar	Intervém adequadamente e respeita as intervenções e opiniões dos colegas

5. Persistência

Não dá início a qualquer tarefa que lhe seja proposta	Algumas vezes toma a iniciativa e algumas vezes persiste na procura de soluções	Toma a iniciativa e persiste na procura de soluções

6. Apresentação dos trabalhos

Não elabora e/ou não apresenta os seus trabalhos	Por vezes elabora e apresenta os seus trabalhos...	Elabora e apresenta os seus trabalhos de forma organizada e cuidada.

7. Sentido de responsabilidade

Não se responsabiliza pelas suas iniciativas/tarefas	Por vezes responsabiliza-se pelas suas tarefas	Responsabiliza-se pelas suas iniciativas/tarefas

Figura 6.8: Ficha de auto-avaliação dos valores e atitudes

6.3 O envolvimento dos alunos na aprendizagem

A aprendizagem é um movimento de adesão voluntária do sujeito que aprende. Desse modo, só aprende quem quer e mesmo quem quer tem de se envolver para que a aprendizagem seja significativa.

A aprendizagem pode resultar, ocasionalmente, de um movimento não voluntário! Mas na escola em que o ensino se faz de forma concentrada, concertada e deliberada, partimos do pressuposto de que quanto mais consciente os alunos estiverem (das regras implementadas - de trabalho, de avaliação, de quais os objectivos que tiver de perseguir, …) e se envolverem activamente, mais hipóteses terão de fazer aprendizagens significativas. Daí ter havido uma preocupação constante e sistemática de esclarecer os alunos acerca das opções de ensino, qual o objecto de aprendizagem, quais as estratégias principais que iriam ser implementadas, as formas e critérios de avaliação a que seriam sujeitos (tendo em atenção as decisões *políticas* e pedagógicas da Escola) e tentar, de diversas formas, que os alunos, reflectindo sobre as suas acções e resultados obtidos, realizassem um balanço e explicitassem, de forma consciente, em que é que iriam investir no futuro próximo para salvaguardarem o respectivo sucesso. Este sucesso era sempre apresentado como a passagem de ano lectivo. Em particular, e como estávamos no âmbito da disciplina de Matemática, solicitava-se aos alunos que explicitassem quais as medidas a tomar para salvaguardarem o sucesso à disciplina de Matemática e que passaria para uns por obter nível três e para outros 4 ou 5 conforme as possibilidades e capacidades de cada um.

Assim, neste item, iremos começar por apresentar de que forma os alunos, no início do 3º período, fazendo um balanço sobre o trabalho nos períodos anteriores (não só a Matemática mas a todas as disciplinas do plano curricular do 9º ano) reflectiam sobre as diligências que cada um deveria tomar para projectar, de forma estratégica, o futuro, apresentaremos alguns excertos das auto-avaliações do envolvimento dos alunos.

As acções estratégicas definidas pela professora para envolver os alunos na sua própria aprendizagem e de forma significativa passaram por investir num ensino centrado em tarefas criteriosamente seleccionadas (e centrado nos alunos), num formato de trabalho de grupo com produtos finais (relatórios) que seriam objecto de avaliação (não só os produtos finais como o processo do trabalho de grupo). Os responsáveis pela elaboração dos relatórios seriam alunos que, em cada tarefa, assumiriam a função de secretário de forma rotativa: à função de secretário estava associada a necessidade de cada aluno melhorar a sua comunicação matemática e, em particular, a comunicação escrita. Ao elaborar o relatório em grupo, o secretário tinha a co-responsabilização de todo o grupo pelo que haveria a segurança de que não seria um produto individual mas um produto obtido da discussão, reflexão e convergência dos conhecimentos e saberes dos elementos do grupo: passando por uma fase inicial de apropriação entre pares era fundamental congregarem esforços para que o relatório pudesse estar o mais completo e o mais aprofundado possível e daí poderem solicitar a ajuda da professora, consultar o manual e o próprio caderno diário. O facto de cada tarefa proposta para aprendizagem ser, também, uma tarefa de avaliação para cada aluno (ainda que num formato de trabalho de grupo) induzia, nos alunos, maior responsabilização pessoal pelo que se passava em cada aula não só de forma individual como em termos de grupo na turma; os alunos de um determinado grupo também responsabilizavam os respectivos colegas do grupo não só pela aprendizagem mas especialmente pela melhoria dos relatórios finais pela importância que a respectiva avaliação poderia influenciar a avaliação sumativa de cada aluno, no final do período.

Neste contexto para além da professora que ajudaria a centrar cada grupo na aprendizagem solicitada através da actividade proporcionada pela tarefa, os elementos de cada grupo, regularmente lembravam os respectivos colegas da importância da resolução adequada das tarefas propostas, isto é, tinham autoridade para exigir dos colegas uma postura e comportamento adequados à sala de aula (conferência 3 – ver item 6.3.3.1).

A dinâmica de sala de aula caracterizada acima impelia ao envolvimento positivo dos alunos. Quando e apesar de tudo o que era feito os alunos continuavam a dar mostras de não se quererem envolver na respectiva aprendizagem os pais eram informados da situação e, em conjunto (professora e pais), negociavam-se estratégias nesse mesmo sentido (conferência 4 – ver item 6.3.3.1).

Também apresentaremos evidências de como os recursos suficientes sendo ou não disponibilizados aos alunos para poderem desenvolver uma determinada actividade se constituem em ferramentas que podem condicionar/facilitar as aprendizagens (conferências 1 e 2 – ver item 6.3.3.1).

Para descrevermos e caracterizarmos o envolvimento dos alunos recorremos a extractos da auto-avaliação do envolvimento (6.3.1), a extractos da Listagem Dinâmica de Perguntas no que se refere à "ajuda que esperam da professora" (6.3.2) e às transcrições das conferências entre a investigadora e a *critical friend,* acima designadas de conferências (6.3.3).

6.3.1 Auto-avaliação do envolvimento: balanço do trabalho desenvolvido e perspectivas e ajustes futuros

Na primeira aula do 3º período a professora propôs que fosse realizado, de forma individual e escrita, por cada aluno, um balanço do trabalho efectuado até ao 2º período em termos globais do currículo do 9º ano e em termos particulares e específicos do currículo de matemática. Em sumário ficaria registado o seguinte:

- 9ºE – 04-04-2005 (10h00) - Definição de estratégias de trabalho no 3º período. [...]
- 9ºA – 04-04-2005 (16h45) – [...] Trabalho de projecto sobre rotações. Esclarecimento acerca da dinâmica a realizar no 3º Período.
  Reflexão sobre o trabalho desenvolvido e projecção sobre o trabalho a desenvolver.
  Avaliação do trabalho pessoal.
- 9ºB – 05-04-2005 (8h00) – Reflexão sobre o trabalho desenvolvido e definição de estratégias para o 3º período.
  Apresentação da dinâmica da disciplina no 3º período: formas de trabalho, avaliação e competências a desenvolver.
  Trabalho de projecto sobre rotações: ponto da situação.

Solicitava-se aos alunos que, numa folha devidamente identificada e datada (nome, número e turma) e de forma escrita, explicitassem:

1) Número de níveis inferiores a 3 e a que disciplinas;
2) Reflexão acerca do trabalho desenvolvido (estudo, comportamento, realização dos TPC, ...):
   2.1 em geral;
   2.2 relativo à disciplina de Matemática.
3) O que é que vou fazer no 3º Período (comportamento, empenho, TPC,...)?
4) O que é vou fazer para salvaguardar a passagem de ano e/ou melhorar o aproveitamento:

4.1 Quais as metas por que vou lutar?

4.2 Qual a ajuda que espero da professora?

Este exercício de auto-reflexão era regular ser feito no início dos 2º e 3º períodos e a professora aproveitava para fazer uma reflexão no grupo turma acerca da importância da envolvimento de cada aluno e da turma explicitando formas concretas e era fundamentado e explicitado tendo por base dois grandes objectivos:

- 1º - Levar a que os alunos reflectissem sobre o seu envolvimento no desempenho em geral e em particular sobre o desempenho à disciplina de Matemática e tomassem maior consciência acerca da sua situação escolar e académica e utilizassem aquele momento para poderem gizar e envolverem-se em formas de actuação tendo em vista um objectivo óbvio e comum a todos os alunos: ter sucesso e passar de ano.
- 2º - A professora ficar a conhecer, a partir dos registos escritos, a posição de cada aluno acerca do seu envolvimento no desenvolvimento académico em geral e, particularmente, no relativo à Matemática e poder ajustar a sua actuação em consonância e/ou de forma a poder ajudar, de forma mais célere e ajustada cada aluno de acordo com as solicitações específicas. Normalmente a professora reflectia com os alunos acerca das diversas formas de envolvimento.

Todos os alunos fizeram este exercício e, de seguida, apresentaremos alguns excertos dos registos dos alunos das turmas B e E do 9º ano.

Reflexão acerca do trabalho desenvolvido à disciplina de Matemática – 9º B e 9ºE

"No 2º Período não estudei o suficiente para nenhuma disciplina, por vezes porto-me mal e em relação a Matemática faço sempre os TPC" (Ana Isabel, 9ºE)

"Eu trabalhei pouco embora o meu comportamento seja razoável e estudava nas vésperas do teste e fiz poucos TPC para as disciplinas" (Ana Sofia, 9ºE)

"Neste momento o que eu mais quero é passar de ano. Eu tirei quatro negativas (Português, História, Inglês e Físico-Química). Eu acho que melhorei o meu trabalho a nível de comportamento subi negativas e desci uma. Vou tentar manter esta nota a Matemática [nível 3] para passar de ano. O facto de eu tirar negativas deve-se ao meu cansaço, sinto-me muito cansada e é por isso que me acho incapaz. Este está a ser o ano mais difícil da minha vida escolar." (Cátia, 9º E)

"Neste 2º período não tive nenhuma negativa. Neste período, confesso que não estudei muito, estudo mais é na véspera dos testes, o que é mau. Em relação ao comportamento acho que melhorei, comparado com o 1º período: falo menos e presto mais atenção à aula. Relativamente ao TPC confesso que raramente faço." (Claúdia, 9º E)

"Número de níveis negativos – 0
Trabalhei pouco em todos os aspectos e em todas as disciplinas" (Francisco, 9º E)

"Neste período (2ºP) tirei 4 negativas: Matemática, Português, Físico-Química e Geografia. Acerca do trabalho desenvolvido, tinha pouco estudo, o comportamento nem era muito mau e os TPC sempre que sabia fazer, fazia-os." (Joana, 9ºE)

"[sem níveis inferiores a 3] Eu estudei nas vésperas dos testes mas também 2 dias por semana. Não fazia muitos TPC." (João, 9º E)

"Eu não tive nenhuma negativa, pelo contrário, fiquei surpresa ao ver que tive 5 a todas as disciplinas. Eu sempre fiz todos os trabalhos de casa, penso que tenho bom comportamento, sou assídua e pontual e tenho empenho nos estudos, com vontade de aprender." (Márcia, 9º E)

" Nº de níveis negativos -0. Acho que estudei apenas o essencial (o que eu acho que é pouco), acho que falei de mais durante as aulas, a nível de trabalhos de casa fiz a maioria deles."(Nuno Pinto, 9º E)

"Tirei 1 negativa. Eu neste 2º período melhorei o meu comportamento; tentei realizar o maior número de TPC. Melhorei as minhas notas e o meu aproveitamento melhorou." (Paulo, 9º E)

"Em relação a Matemática, não me esforcei o devido, não adquirindo assim o aproveitamento necessário" (Ana Odete, 9º B)

"Em geral, acho que no decorrer do 2º período desempenhei um trabalho mais significativo o que se reflectiu nos níveis finais. Com excepção a Matemática mantive e subi todos os níveis. Em relação à disciplina de Matemática, acho que o trabalho desenvolvido não foi menor, mas algo falhou, talvez o nível do comportamento e/ou da distracção." (Ana Rita Araújo, 9º B)

" [Relativamente à disciplina de Matemática] trabalhei e foi o suficiente para conseguir chegar ao nível 3 mas quero continuar a subir." (Ana Rita Vaz, 9ºB)

"Relativo à disciplina de Matemática tenho estudado só que tenho de estudar muito mais, realizar os TPC e estudar muito mais." (Andreia, 9º B)

“Não tive nenhum nível negativo. Eu penso que o meu trabalho desenvolvido no 2º período foi melhor. Apliquei-me mais no estudo (em casa) de rotina e para os testes. O meu comportamento foi bom no entanto sei que consigo ter melhor. Penso que fiz sempre ou então na maior parte das vezes o trabalho de casa.” (Beatriz, 9º B)

“No geral acho que o trabalho desenvolvido começa a ser mais difícil: os estudos são mais difíceis. O comportamento (o meu) acho que está na mesma e acerca do TPC acho que estou fraco. Na disciplina de Matemática estou com dificuldades tanto nos estudos como nos testes e tenho um comportamento do qual eu não participo muito. No TPC também tenho problemas com isso porque esqueço-me sempre de os fazer.” (Fábio, 9º B)

“Relativo à disciplina de Matemática acho que o outro período deixei passar muitas coisas, diminuí o tempo de estudo. Comportamento não foi dos melhores; há muita conversa e no ano lectivo passado sei que fui prejudicada por isso e não gostava que se voltasse a repetir. Quanto à realização do TPC faço sempre porque acho que é uma maneira de pormos em prática os nossos conhecimentos e ao mesmo tempo de esclarecer dúvidas.” (Liliana, 9º B)

“Tenho 2 negativas (a História e a Geografia – no período passado tinha 5 negativas e ao fim de tanto esforço consegui levantar 4 e descer 1). […] Na disciplina de Matemática comecei a achar a matéria difícil e fiquei desmotivada.” (Lígia, 9º B)

“Relativo à disciplina de matemática, penso que mantive o nível de estudo e rendimento embora tenha descido ligeiramente. O meu empenho é grande pois estou motivada para continuar a estudar com interesse. O meu comportamento, sou bastante conversadora e distraída o que por vezes se torna falta de respeito para com a professora. (Mariana, 9ºB)

“Este período não tive nenhuns níveis negativos. Em geral o meu comportamento não tem sido muito bom, tenho falado muito mas principalmente estou sempre a rir. Tenho estudado o suficiente para perceber e decorar a matéria e tenho me empenhado em fazer sempre os TPC. Nas aulas de Matemática tenho exercitado muito a matéria dada na aula para perceber a matéria, o meu comportamento tem deixado muito a desejar pois eu tenho dado muita importância às conversas dos meus colegas e distraio-me, não estou a deitar as culpas para eles porque a culpa é minha eu é que devia ignorá-los e tomar atenção à aula, e tenho tentado fazer sempre os TPC.” (Tânia Azevedo, 9º B)

“Relativo à disciplina de Matemática o comportamento não é mau, não faço os TPC, porque tenho dificuldades, estudo pouco.” (Tânia Resende, 9º B)

“O meu comportamento na aula de matemática não é muito bom mas a partir de agora vai ser porque mudei de lugar; costumo estudar bastante só não entendo nos testes as notas não são boas e em relação aos TPC costumo fazer.” (Teresa, 9º B)

Nos exercícios de reflexão pessoal dos alunos pode-se identificar, de um modo geral, consciência acerca da situação em que cada um está: há-os os que identificam claramente a gravidade da situação mas que já não têm esperança de poderem inverter a situação, outros que conseguem identificar o que é que falhou no sua aprendizagem (outros nem por isso!...). O facto de ter sido apresentado de uma forma aberta permitiu que os alunos pudessem referir diversos aspectos: a maior parte relacionados com a sua aprendizagem e centrados neles mas outros que eles não conseguiam controlar e que estavam a marcar definitivamente o sucesso/insucesso.

O que é que vou fazer no 3º Período (comportamento, empenho, TPC…)- 9º B e 9º E

“No 3º Período tenho de estudar para subir as duas negativas, fazer sempre o TPC e comportar-me melhor. Vou centrar-me, principalmente, nas duas disciplinas onde tirei negativa, mas também me vou empenhar para subir de notas” (Ana Isabel, 9ºE).

“No 3º período vou tentar falar menos e estar mais atenta, fazer os TPC, estudar regularmente e melhorar o aproveitamento e empenhar-me mais. Vou continuar a estudar” (Ana Sofia, 9ºE).

“Eu quero, muito, no 3º P. melhorar-me em todos os níveis comportamento, empenho, TPC e estudo não sei se vou conseguir. Eu estou em riscos de “chumbar” apesar de não querer” (Cátia, 9º E).

“No 3º período vou tentar melhorar ou manter o meu comportamento, vou empenhar-me mais nas aulas, participando, prestando atenção, …, vou começar a fazer os TPC e vou ter de começar a estudar um pouco diariamente” (Cláudia, 9º E).

“Comportamento + 20%; empenho + 20%; TPC mais 30%; estudo +60%; vou melhorar o aproveitamento” (Francisco, 9º E).

“No 3º Período em relação a Mat. “vou procurar” estar mais atenta (não estar “na Lua”), estudar mais e fazer sempre os TPC. Nas disciplinas a que tirei positiva, vou tentar manter. E às que tirei negativa, vou tentar levantar. Para melhorar o aproveitamento, vou tentar levantar as negativas que tenho. Pelo menos a Port, Geo, FQ, porque não sei se consigo levantar a Mat, mas vou tentar fazer por levantar a Mat.” (Joana, 9º E).

“Vou melhorar o comportamento na sala de aula para entender a matéria” (João, 9º E).

“Eu pretendo continuar o trabalho desenvolvido nos períodos anteriores […] e quero manter a minha nota. Porém tenho receio de baixar devido às provas globais, mas vou esforçar-me” (Márcia, 9º E).

“Vou continuar a trabalhar para tentar subir a todas [as disciplinas], mas acho que com o meu método de estudo não vou lá. Antes só estudava [a matemática] na véspera do teste, agora vou “TENTAR” estudar dias antes. Vou mudar de método de estudo, fazer os TPC com mais regularidade e estar mais calado nas aulas, a todas as disciplinas” (Marcos, 9º E).

“Relativamente ao 3º período sempre me disseram que é o período que vale mais, por isso vou tentar empenhar-me a sério em todas as disciplinas, tentar fazer os todos os TPC, que irá ser quase impossível pois esqueço-me facilmente, vou tentar estudar regularmente e vou tentar não seguir os caminhos do mau comportamento, sendo em muitos casos impossível” (Nuno Canadas, 9ºE).

“No 3º período espero não cometer o mesmo erro do 2º período, que foi deixar de falar na aula seguinte à que me encontrava, ou seja vou deixar de falar já na primeira aula. Vou-me empenhar mais mesmo que a matéria não me agrade. O trabalho de casa terei de o fazer sempre (embora eu ache que o trabalho é para ser feito na aula). Espero vir a estudar mais, e não só o essencial, nem só estudar para os testes, enfim vou tentar melhorar em todos os aspectos que eu acho que não estão bons” (Nuno Pinto, 9ºE).

“Vou tentar manter ou ainda melhorar tudo, o comportamento, notas, testes, etc. Vou estudar mais e melhor; vou empenhar-me ainda mais no trabalho e nas aulas.” (Paulo, 9º E)

“Eu reflecti muito em relação à minha situação, e vou empenhar-me muito mais, e vou, concerteza, tirar bons resultados, pois vou conseguir alterar a minha situação. Em relação ao meu comportamento não tenho muito a dizer pois não sou assim tão mal comportada durante as aulas, posso falar um pouco, mas nada que perturbe as aulas. Acerca do meu empenho vou ter de alterar, ou seja, vou-me empenhar cada vez mais e sei que vou conseguir levantar as minhas notas, pois vou ter uma atitude diferente. Nos TPC, antes não tomava assim a devida atenção, em relação a isto, mas a partir de agora vou fazer tudo porque quero alterar a minha situação e ganhar cada vez mais pontos em meu favor, em relação ao estudo, vou empenhar-me em tudo pois quero tirar um bom aproveitamento a tudo" (Ana Odete, 9º B).

"No 3º período quero manter e se possível subir as notas, em especial à disciplina de matemática, onde o "nível de trabalho" não foi tão satisfatório, logo melhorar o comportamento, empenho…" (Ana Rita Araújo, 9º B).

"Relativamente ao comportamento eu vou tentar falar menos e com isso melhorar a minha aprendizagem. Vou-me empenhar ao máximo. Vou continuar a fazer o TPC como tenho vindo a fazer; vou estudar um pouco todos os dias" (Ana Rita Vaz, 9ºB).

"Comportamento – vai ser o melhor possível para poder estar atento; empenho – vou fazer tudo o que a professora disser para fazer o melhor possível; TPC – vou fazê-lo sempre que pedido pelos professores; Estudo – vou fazer uma revisão da matéria dada nas aulas de cada dia" (André, 9º B).

"No 3º período, vou tentar melhorar o meu comportamento, empenhar-me muito mais, realizar os TPC e estudar muito mais. Vou lutar para subir a nota a Matemática [e…], pois baixei no 2º período" (Andreia, 9º B).

"No 3º período vou tentar melhorar o meu comportamento, aumentar o meu empenho, continuar a realizar o trabalho feito com o TPC e continuar com o meu método de estudo no entanto vou tirar mais dúvidas sempre que elas existam." (Beatriz, 9º B)

"Comportamento: Vou melhorar bruscamente; empenho: Vou tentar melhorar muito; TPC: não preciso de melhorar; estudo: vou estudar mais" (Bruno, 9º B).

"Vou tentar mudar o meu comportamento, melhorar o meu empenho, não me esquecer dos TPC's e estudar mais" (Fábio, 9º B).

"Comportamento – diminuir a conversa e tentar prestar mais atenção às aulas; empenho – esforçar-me sempre mais, de modo a atingir os meus objectivos; TPC – realizá-los, pois são uma grande ajuda para o nosso progresso; estudo – estudar mais e melhor; penso que não vale a pena estudar mais ou menos 2 horas se não estivermos concentrados na actividade a realizar. Prefiro estudar 1 hora e estar concentrada no meu trabalho" (Liliana, 9ºB).

"Comportamento – vou tentar falar menos pois não sou uma aluna que se comporta mal; empenho – vou-me empenhar mais; TPC – Vou continuar a fazer os TPC; estudo – Vou tentar estudar mais." (Lígia, 9º B).

"Comportamento – tentar melhorar evitando estar sempre a falar, a distrair-me a mim e aos outros e consequentemente estar mais atenta; empenho – penso que o meu empenho é relativamente bom, por isso espero manter isso; TPC – evitar o esquecimento; Estudo – estudar mais durante a semana e fazer os TPC, pois isso também abrange o estudo" (Mariana, 9ºB).

"Vou melhorar o comportamento, vou-me empenhar mais, vou fazer os TPC e vou estudar mais" (Paulo, 9º B).

"No 3º período vou tentar melhorar o meu comportamento, o meu empenho, os TPC vou realizá-los sempre que puder e vou aumentar ou diminuir o estudo dependendo da facilidade com que eu compreenda a matéria. Vou lutar pelo melhoramento das notas nível 3 e do comportamento" (Tânia Azevedo, 9º B).

Em síntese, os alunos estão predispostos para melhorar o seu comportamento (estando mais atentos e concentrados no trabalho de sala de aula e tendo uma postura mais activa), empenharem-se mais (incluindo realizarem as tarefas propostas para casa) assim como melhorarem o seu estudo: estudando mais regularmente (para além das vésperas dos testes), precisando a forma como irão estrategicamente consegui-lo.

Quais as metas por que vou lutar?

"Eu penso que a minha passagem já está certa, por isso vou continuar como estou nos outros períodos" (Nuno Canadas, 9ºE).

"Como não me encontro em situação de não passagem de ano, logo o meu trabalho será para ser melhorado" (Nuno Pinto, 9ºE).

"[4 negativas: Português, História, Geografia e Físico-Química]. Eu vou melhorar o meu aproveitamento, tenho de estudar mais não baixar as minhas notas e sim levantar as que tirei negativa[…]" (Patrícia, 9ºE).

"Vou tentar manter algumas notas e subir às outras" (André, 9ºB).

"Chegar a exame com positiva [a matemática]" (Ana Rita Vaz, 9ºB).

"Vou lutar com tudo o que tenho disponível para passar de ano" (Bruno, 9ºB).

"Tentar dar sempre o meu melhor, de modo a conseguir uma avaliação satisfatória (no mínimo) porque acho que nós devemos querer sempre mais e também devemos procurar fazer sempre o melhor que eu puder" (Liliana, 9º B).

"Vou lutar para subir as disciplinas mais fáceis de levantar" (Paulo, 9º B).

Independentemente da situação de cada aluno há a vontade de melhorar: uns porque têm de salvaguardar a passagem de ano; outros porque apesar de terem a situação de passagem de ano como certa porque querem melhorar o aproveitamento.

6.3.2 Expectativas relativas à ajuda da professora

A recolha das expectativas acerca da actuação da professora eram recolhidas, no início de cada período, identificando o aluno, para que a professora pudesse atender às especificidades de cada aluno e poder ajustar a sua actuação. Também a partir da explicitação das expectativas podemos aperceber-nos das principais preocupações dos alunos, de algumas concepções que têm acerca da Matemática, de como se posicionam relativamente à aprendizagem matemática. Esta é também uma estratégia geral de envolvimento uma vez que leva os alunos a tomarem consciência do que é que esperam, ou não, da professora e a explicitá-lo. O facto de um professor estar atento e predisposto a ajudar e a ser agente facilitador das aprendizagens dos alunos acrescido das informações dos alunos permite agilizar a ajuda e/ou fazer interpelações. Poder desbloquear os obstáculos/dificuldades com que os alunos se deparam e ou a tomar conhecimento de especificidades dos alunos caracterizados por uma determinada história pessoal (desenvolvimental e académica) que podem não ser evidentes para o professor enquanto tal pode proporcionar um maior envolvimento porque tem espaço para explicitar, de forma livre, aquilo que o preocupa ou aquilo que sabe que é fundamental em termos pessoais.

Neste item apresentaremos inicialmente extractos integrados na auto-avaliação do envolvimento, da turma B do 9º ano, realizada no início do 3º período, em Abril e extractos oriundos dos registos da Listagem Dinâmica de Perguntas onde esta questão estava presente e que foi realizada em Maio, a meio do 3º período.

No início do 3º Período (início de Abril de 2005) - 9ºB

"Que me venha a apoiar como tem vindo a ajudar" (Ana Rita Vaz, 9ºB).

"Que nos ajude a superar as nossas dificuldades ajudando-nos a realizar os exercícios e que nos dê uma explicação como se faz. Quase como tem feito até agora" (André, 9º B).

"Espero que a professora faça fichas/testes tendo em atenção a matéria dos exames. Que nos dê, empreste várias provas já feitas e que tenha muita paciência connosco!!" (Beatriz, 9ºB).

"Espero que a professora seja mais compreensiva" (Fábio, 9ºB).

"Saber se os alunos têm dúvidas e da maneira mais eficaz tentar explicar, de modo a que todas as dúvidas sejam esclarecidas, pois há matérias mais complexas e desse modo a compreensão é mais demorada" (Liliana, 9º B).

"Que me venha a apoiar tanto a mim como aos meus colegas" (Lígia, 9º B).

"Leccionar a matéria mais devagar, para uma mais fácil compreensão da mesma" (Mariana, 9ºB).

"Não espero nenhuma ajuda da professora porque já me ajudam o suficiente" (Paulo, 9º B).

"A ajuda que espero é a mesma porque ela está sempre a apoiar-nos e ao nosso lado quando precisamos por isso não vai mudar nada, só se for para pior porque para melhor já faz a professora" (Teresa, 9ºB).

No início de Maio de 2005, integrado na Listagem Dinâmica de Perguntas

Total de respondentes (9º A, B e E)	72	
Fazer revisão e praticar mais exercícios	21	29%
Tirar as dúvidas e ajudar a ultrapassar dificuldades pessoais	18	25%
Todo o tipo de ajuda (moral, psicológica, …)	10	14%
Testes mais fáceis e dar mais "feriados"	7	10%
Resolver problemas e a aprofundar	2	3%
Colaboração mais atenta à dinâmica de grupo	1	1%
Dar mais tempo para passar o que está no quadro	1	1%
Que não me esteja sempre a mandar escrever	1	1%
A mesma que tem dado até agora e porque já ajuda o suficiente	3	4%
Nenhuma, não sei ou não respondeu	8	11%

Tabela 6.25: Expectativas dos alunos relativas às ajudas da professora

A partir dos dados agrupados constatamos que a maior ajuda que esperam da professora se centra "em fazer revisão e praticar mais exercícios" (29%), seguida de "tirar as dúvidas e ajudar a ultrapassar dificuldades pessoais" (25%) ou de uma ajuda mais geral e global (14%). Há algumas situações particulares e pontuais tais como "resolver problemas e aprofundar" (3%), "colaboração mais atenta ao trabalho de grupo" (1%), "dar mais tempo para passar o que está no quadro (1%). Há outros alunos que consideram que a ajuda da professora já é ajustada e que se pode manter (4%) ou outros que não sabem ou não precisam ou não responderam (11%).

6.3.3 Dinâmica da aula e envolvimento (produtivo) dos alunos na disciplina de Matemática

A partir de conferências entre a investigadora e a *critical friend* podemos tomar contacto com algumas características do envolvimento produtivo dos alunos na disciplina de Matemática nas tarefas desenvolvidas em contexto de sala de aula e como a (inter)acção com a professora pode condicionar para o bem e para o mal o desenvolvimento e a acção e, consequentemente a aprendizagem dos alunos. Nas conferências a professora investigadora será designada pela letra I e a *critical friend* pela letra C.

6.3.3.1 A importância dos recursos na dinâmica de sala de aula

As aulas de medição de objectos de altura inacessível foram dinamizadas pela investigadora e pela coordenadora do grupo disciplinar, Paula, que se disponibilizou para apoiar e assessorar a investigadora. A coordenadora de grupo de Matemática constituiu-se como um recurso fundamental.

Conferência 1 – Relato da aula desenvolvida no 9º A, no dia 02/05/2005

	Turma/Data/A investigadora (I) descreve à *critical friend* (C)	
I 1	O 9º A, na 2ª feira (2/05/2005) fiz a aula de ir para a rua (*Hm!...Hm!...*) Fomos para a aula e eu tinha a área de projecto e Matemática uma a seguir à outra, com a mesma turma, [por esta ordem]. Perguntei à Paula, [coordenadora do grupo disciplinar] qual é a que lhe dava mais jeito. A que lhe dava mais jeito era a das 3 horas: troquei a aula de Área de Projecto com a aula de Matemática *(Hm!...Hm!...)*. Entretanto avisei os alunos que íamos ter Matemática, andei nos recreios a dizer-lhes que íamos ter Matemática, às 3 horas, para chegarem a tempo, para não virem atrasados...para virem à aula de Matemática. Fomos para a aula de Matemática e os alunos chegaram tarde, uns mais tarde que outros, (*Hm!...Hm!...)*, comecei por me aborrecer... Ah! Nesse dia também estava a chover, e eu estava com algumas dificuldades de perceber se havia de fazer ou não, a aula de rua, nesse dia, não é? (*Hm!...Hm!...)* Sabia lá se ia estar chover ou não? Como se isso não bastasse, apercebi-me que não tinha levado as fichas... o papel onde eles deveriam escrever *(Hm!...Hm!...)*... Não tinha, porque tinha-as deixado na pasta que tinha trazido para aqui	**Aproveitamento de circunstâncias particulares como recursos** Esclarecimento da alteração da hora da aula de matemática Falta de pontualidade dos alunos … Condições climatéricas adversas… **Falha na disponibilização de recursos previamente preparados** Falta da folha suporte para o

	no sábado e como não tinha trocado as pastas…, Pronto fui para a aula sem as fichas. Dei por ela, antes de começar a aula.	registo dos dados e elaboração do relatório: falta de recursos
	Fui buscar as cartolinas e, quando chego à aula, andei a procurar as cartolinas em toda a minha pasta e não encontrei as cartolinas. A Paula..., estávamos a ver se havíamos de fazer... ou não..., eu ainda estive a tentar decidir...	**Remediação da falta de recursos iniciais** Falta de cartolina para construir o astrolábio: falta de recursos
	Eu disse: vamos tentar ver se conseguimos fazer; o melhor é avançarmos...	Decisão de "fazer a aula de rua"
	as fichas eu passo no quadro, sei como é que lá está aquilo*(Hm!...Hm!...)*..., portanto eles passam para o caderno, a gente pode fazer na mesma. *(Hm!...Hm!...)*...	Hipótese de remediação da falta das fichas…
	Quando dei por ela que me faltavam as cartolinas pedi a um aluno que me viesse à reprografia, que é no 4º piso!, estava no 1º, *(Hm!...Hm!...)*...viesse ao 4º piso buscar cartolinas porque eu tinha levado uma parte mas não as tinha levado todas...Mas como eu não as encontrava em lado nenhum...tinha quase a certeza que as tinha metido na pasta, mas não as encontrava... pedi ao aluno para ir buscar à reprografia...e isso ficou resolvido. De forma que os alunos quando chegaram não lhes foram distribuídas logo as cartolinas, porque não as tínhamos, não é? *(Hm!...Hm!...)*...tinha mandado o aluno ao 4º piso,... foi-lhes distribuído a palhinha, e foi-lhes distribuído o clip...mas como entretanto os alunos não chegaram todos ao mesmo tempo, e aqui há alunos que são muito, ...como é que hei-de dizer....há alunos que gostam muito de brincar, ...de pegar uns com os outros, ...de esconder objectos uns aos outros,... as coisas foram complicadas no início...	Remediação da falta de cartolinas **Importância dos recursos no envolvimento normal dos alunos** Os alunos ainda não estavam providos dos recursos suficientes…
	Enquanto que os outros alunos [das outras turmas] iam chegando aos grupos e já lá tinham o material e começavam a trabalhar,... Estes chegaram aos grupos, não tinham material e, para além disso, começaram a pegar uns com os outros...	Transição do ambiente de intervalo para o ambiente de sala de aula mais dificultado pela falta dos recursos suficientes para iniciar a actividade proposta pela tarefa
	Houve alunos que faltam muito às aulas, nesta turma tenho alunos que faltam muito às aulas, no 9º E , também, e esses normalmente como não	

	têm seguimento, e têm até uma idade muito alta, a que é que se dedicam?, a brincar! Pronto! Foi mais difícil que nas outras turmas, ... como é que eu hei-de dizer?,... pôr os miúdos em clima de trabalho, nesta turma foi difícil! Foi preciso chamar várias vezes à atenção: ora porque roubavam o boné, ora porque saíam do seu grupo e iam pegar com os outros, e depois, também, porque eu inicialmente me sentia um bocado insegura porque não levei nem as fichas e depois me desapareceram as cartolinas, ...Portanto, faltavam-me coisas e eu não sabia o que é que lhes tinha feito! Pronto, de qualquer das maneiras, houve uma altura em que... o clima, ... porque não sei se tu ... reparas nisso, ou se já fizeste em todas as turmas mas o que nós reparamos é que inicialmente há um burburinho bastante grande, enquanto eles estão a fazer e...a perceber o que é que têm de fazer ou não, e há uma altura em que está praticamente tudo em silêncio, que percebemos que todos os alunos estão a (*trabalhar...*)...trabalhar. Antes de começarem a fazer as medições até à altura dos olhos*(Hm!...Hm!...)*.... Houve também esse momento, nesta turma *(Hm!...Hm!...)*...que se percebeu que estavam todos a... (*a fazer* ...) já a trabalhar e a fazer as coisas,... eu dei-lhes na mesma meia hora mas... que não chegou porque chegaram atrasados, por uma data de coisas, portanto que não chegou!, Pedi-lhes para medirem [até] à altura dos olhos e o problema começou aqui: quando lhes pedi para fazerem medições à altura dos olhos, eles fizeram medições, mas depois era preciso registar isso nalgum sítio... Eu fiz no quadro qual era a tabela que eles deviam fazer, claro! A tabela que eu fiz no quadro foi a tentar relembrar-me do que era preciso... estava assim um bocado... de improviso, ... depois primeiro que alguns grupos decidissem quem era o secretário? Foi uma desgraça!..., porque ninguém queria *passar* e porque não sei quê!... e depois enquanto que uns não querem passar e té, té té!... para depois registarem as alturas...	Insegurança da professora pela falta de recursos suficientes para a dinâmica da aula Características do ambiente de sala de aula que indicam um maior envolvimento dos alunos na actividade desenvolvida A falta da ficha de registo trouxe dificuldades acrescidas à realização da tarefa… **A dificuldade dos alunos aceitarem a responsabilidade concedida** A responsabilidade de função de secretário, nalguns grupos, foi difícil de assumir…
C 2	Mas tu aqui, desculpa, tu aqui pediste secretário, nesta altura?	

I 3	Peço sempre secretário! Só que a páginas tantas como os via que não estavam a escrever nada...	
C 4	Mas o que é que querias que eles escrevessem enquanto estavam a construir o astrolábio?...	
I 5	Não! quando começaram a medir a altura até aos olhos... eles precisavam de registar! Não é só medir até aos olhos!...	
C 6	Ah! Eu aqui pedi que cada um registasse a sua...	
I 7	Não registou na ficha?	
C 8	Sim!	
I 9	Pois! Mas, ouve lá: mas tem que haver alguém responsável por registar as coisas na ficha: um mede-se, outro mede-se, outro mede-se: *(Hm!?!...)*...tem que logo lá pôr! (*Pois!*) Era a altura do secretário*(Hm!..Hm!..)*... Nalguns grupos foi uma bagunça, porque ninguém queria ser secretário!, (no grupo do Hélder); é o grupo do Hélder, do João Santos, do Pedro, e [do] Tiago... Filipe – são quatro alunos, nenhum deles tem dificuldades a Matemática; são alunos com facilidade mas depois em termos,... podiam fazer um trabalho rápido e com responsabilidade, não! Porque ... um dos problemas que eles tiveram foi decidir a *porcaria* do secretário... E eu disse: tanto faz! Porque para a próxima vocês têm outro secretário, portanto, rodará por todos, qual é o problema? Vocês, os que já foram, não são... e depois roda! Foi difícil! Portanto, primeiro enquanto decidiram, depois para passar!... Passaram aquilo tudo rascunhado... depois registaram as alturas... Depois fomos para a rua… Quando fomos para a rua, o que é que chegaram? Chegaram miúdos à rua que deram por conta que não tinham ... Como é que se chama? A fita métrica... Foram sem fita métrica, outros foram sem a folha para registarem os dados e estávamos no 1º Piso, foi a única turma que estávamos mais longe porque... o pátio da escola é no 3º Piso, a entrada da escola, e nós estávamos no 1º Piso.. Portanto, primeiro que cheguem	Intervenção da professora … Dificuldades de gestão no grupo: tomada de decisão do secretário e tomada de decisão de registar os dados recolhidos… **Deficiente aceitação da autoridade concedida** Ausência de responsabilidade de pelas normas de realização da actividade (sem fita métrica; sem ficha de registo).

	cá abaixo, primeiro que cheguem lá acima, subir aquelas escadarias todas! *(Hm!...Hm!...)*.., vieram cá abaixo buscar, outra vez a fita métrica, vieram outra vez lá acima fazer as medições... Havia grupos que estavam dispersos, queriam lá saber do grupo, andavam a veranear...	Ausência de responsabilidade de pelas normas de realização da actividade (esquecimento momentâneo de que estavam a trabalhar em grupo pequeno)
C 10	Queriam era brin....	
I 11	Não! Queriam ir para a beira dos outros ver como eles mediam.... eles nem sequer estavam alheios às coisas, estás a perceber? mas estavam dispersos, não estavam com aquela responsabilidade... eu continuei a arreliar-me, fartei-me de me arreliar, porque esperava deles muito mais do que os outros, eles não estavam a responder!... Demoramos montes de tempo a fazer as medições, mais tempo do que em qualquer outra turma, depois fomos para baixo, outra vez, depois de recolhermos as medições, fomos outra vez para baixo, fazer os cálculos,...Eles fizeram... Nesta turma, alguns deles começaram logo a medir os cantos à sala, são salas antigas, *(Hm!...Hm!...)*...a perder tempo, não é? Porque não estavam a fazer o que lhes era pedido, portanto dispersavam-se.... arreliei-me bastante com os grupos, aqui... E depois, quando houve um grupo, que tinham, ... para medir uma árvore, sei lá, de 5 metros, tinham-me... de 5 a 10 ou... de 4 a 10 metros, não tive serenidade, passei-me com eles... era um grupo, também, de bons alunos (sorrisos da própria!), passei-me com eles... achei que eles (*Podiam fazer mais?, não é?)* andaram a brincar...andaram a brincar, não levaram aquilo com responsabilidade... Depois uma das alunas, achou que eles não tinham responsabilidade nenhuma naquelas medições... Eu disse-lhes: Pois, vocês não têm responsabilidade, tenho eu! Foram vocês que fizeram as medições, mas quem é responsável pela cena, de tudo o que aconteceu, sou eu! Então? Quem é professora? Somos nós? Nós temos alguma culpa de ter aparecido isto, assim?	A professora tinha expectativas acerca do desempenho… Dispersão e falta de concentração no que lhes era solicitado… Dificuldade da aluna em aceitar a sua responsabilidade na actividade de medição do objecto seleccionado… Expectativas altas acerca do desempenho do grupo **Dificuldade da professora em aceitar a autoridade dos alunos não pondo em perspectiva os erros cometidos pelos alunos** Existência do erro como situação natural de quem

	Não! Sou eu! Eu já disse que sou eu! Porque vocês não estiveram a fazer as coisas com atenção!; porque vocês devem ter feito más medições... E agora como é que nós vamos descobrir quem é que mediu mal? Não conseguimos! Então qual era a solução, perguntou-me o grupo? A solução era tornardes a fazer as medidas, mas vocês, nesta altura, já não têm tempo! (Estava a 5 minutos de tocar!) Eu não sei, olhem escrevam alguma coisa... digam o que é que se passou, tentem perceber o que é que se passou... e tentem reflectir acerca disso... O que eles escreveram lá, mas eu estava mesmo furiosa com eles, estava furiosa porque achei que, como eles são todos bons alunos, não precisam de se preocupar com aquilo e como eles não precisam de se preocupar com aquilo o trabalho sai pior que nos outros grupos, eu disse-lhes que... que...fiz-lhes sentir mesmo isso, e saí daquela aula muito arreliada! Todos eles fizeram o trabalho, entregaram-me, todos, o trabalho, mesmo até à hora de saída, … alguns ainda estiveram no intervalo a acabar o trabalho... Alguns disseram: fazemos na próxima aula... E eu disse-lhes: a próxima aula é Área de Projecto, não é Matemática! Portanto têm que me entregar antes de se irem embora, para o intervalo, têm de me entregar os trabalhos e os relatórios... E pronto! Se não vos deu os dados em condições, vocês reflictam acerca do que se passou! […] É claro que também eu, isso eu não lhes disse, mas pensei!, que um dos motivos porque aquilo não funcionou tão bem foi a falta da ficha... e também, nesse caso, estava arreliada comigo porque fui para a aula sem aquele aspecto que, nós inicialmente quando planificamos nunca imaginamos aquilo, mas que depois se tornou num... como é que eu hei-de dizer?, numa ferramenta fundamental para que a aula decorresse, quer dizer, que o trabalho matemático decorresse sem sobressaltos porque muitas das dificuldades era que os alunos não queriam passar as tabelas do quadro, estiveram muito tempo, quer dizer,... ocuparam muito tempo a passar as tabelas do quadro, às vezes passavam-nas mal, pois eu	realiza uma actividade Os alunos continuam envolvidos na conclusão da tarefa no tempo destinado ao intervalo A **professora "devolve " a autoridade aos alunos responsabilizando-os pelas medições e possíveis erros cometidos.** Inexistência de recursos suficientes condiciona a actividade dos alunos e o ensino previsto A meta reflexão da professora e a identificação da sua responsabilidade na situação vivida por não ter levado os recursos suficientes para que a actividade proporcionada pela tarefa decorresse sem

	chamava-lhes à atenção, depois registaram mal... uma data de coisas assim, ...portanto também estava furiosa comigo e por isso é que aquilo tudo foi assim avolumado... *(Hm!...Hm!...)*... Pronto! Recolhi as coisas do 9º A Queres fazer alguma pergunta?	sobressaltos…

Conferência 2: Relato da aula desenvolvida no 9º E, no dia 04/05/2005

	Turma/Data/ A investigadora (I) descreve à *critical friend* (C)	
I 12	Dia 04/05, 9º E. Nesta aula, também levei...levei todos os materiais para a aula...Estávamos...Mandei-os logo para os grupos, distribui-lhes as cartolinas, os clips e as palhinhas... Fui ver os grupos que tinham trazido transferidor, ou não... Fui verificar os materiais e eles começaram de imediato a construir […] O astrolábio! Pedia-lhes rigor nas medições...Pronto. Pus isso no quadro e dei-lhes meia hora e praticamente em meia hora... eles construíram o astrolábio. Mas claro, havia sempre aqueles que estavam mais atrasados... Mandei-os medirem-se, dentro da sala de aula, até à altura dos olhos e quando eu os mandei medirem-se eles quiseram medir a turma toda...Eles aí misturaram-se todos nos grupos e eu depois dizia-lhes: Tu de que grupo é que és? Então vai lá para o teu grupo que é lá que tens de ser medido....e registado! E dei-lhes a ficha para registarem os valores*(Hm!... Hm!...)*. Depois de registarmos os valores todos, fomos para a rua fazer medições. Aqui na rua a fazer medições...a...	Existência dos recursos suficientes… A transição do espaço do intervalo para a sala de aula foi mais rápida pela organização estável da forma de trabalho A professora relembra que o trabalho é para ser realizado em pequeno grupo… A importância do suporte da ficha na organização do trabalho…
C 13	Aqui, estavas sozinha?	
I 14	Não, não! A Paula sempre me acompanhou *(Hm!... Hm!...)*.Ela veio a todas as aulas de construção de astrolábio e de medições. Ela veio a todas. *(Hm!... Hm!...)* Fomos fazer medições...faltaram-me, dois alunos aqui, à aula Havia um aluno chinês que me dizia: Oh, professora, porque é que estamos aqui a fazer isto? Isto não serve	Problematização: surpresa de um aluno relativamente ao tipo de trabalho a realizar

	para nada, professora! (*Pois!*) Estamos a construir uma coisa que não serve para nada! (*Pois!*) E eu disse: tem calma que tu já vais ver para que é que serve...(sorrisos da C) Mas ele dizia-me: Oh, professora! Oh, professora! Viemos fazer as medições cá para fora e...houve grupos que tiveram de repetir as medições porque a fita métrica tem dois tipos de [unidades de] medidas: tem em pés e em metros... e houve um grupo que mediu, a Paula deu por ela, que houve um grupo mediu em pés...Depois aquilo não funcionava, não é?... Então tiveram que refazer todas as medições. Não havia problema, não é? Recomeçaram tudo outra vez. Fizeram e registaram. E registaram tudo mais ou menos; tiveram algumas dificuldades mas íamos tirando as dúvidas uns com os outros... o tempo também estava bom e eles fizeram as coisas... Depois voltamos, outra vez, para a sala de aula: fazer o cálculo da tangente e a ver as alturas... Houve grupos que havia... desfasamentos de 10 metros...aqui. É! Desde 19 a 9. 19 Não! Desde 17 a 7... desfasamentos muito grandes... Suponho que tem a ver com a maneira ... às tantas deve ter tido a ver com eles olharem... porque alguns punham o astrolábio e não olhavam por ele, punham o astrolábio em qualquer situação e nem estavam a olhar por ele e, portanto, os outros que medissem! (Risos) Pronto. Não sei se foi disso ou não e todos eles fizeram essas medições... Vieram para a sala de aula e calcularam...alguns calcularam, imediatamente os valores que puseram na tabela sem me apresentar os cálculos. Lá tive que os mandar, outra vez: Não, vai-me pôr os cálculos todos aí! Mas ele disse a professora não sabe como se faz? Eu sei, mas eu quero que vocês registem como fizeram as coisas... Porque ele dizia-me: eu fui calcular a tangente à máquina, multipliquei pelo valor que encontrei e deu-me a altura. Então esse grupo, que era o do José Eduardo e do Nuno Pinto, que estava a ser secretariado pelo José Eduardo,... não viu que deixou uma coluna	– construção de um astrolábio Dificuldades no uso da fita métrica Um grupo teve necessidade de refazer todas as medições. As condições climatéricas estavam de feição O problema de haver pouco rigor nas medições… A professora faz supervisão do trabalho… Falta de responsabilidade pelas normas

	da tabela por preencher, e ficaram todos felizes e portanto deram-me aquilo assim e escreveram porque eu lhes disse: Atenção! Porque vocês têm de me apresentar os cálculos... Ele já andava fora do grupo e eu disse-lhe: Vai lá para o teu grupo e continua a escrever, ó José Eduardo! Mas mesmo assim, o relatório veio "pendurado", o relatório veio incompleto. Foi o único grupo que entregou o trabalho com a tabela incompleta. A Paula, não vou dizer coisas que disse à bocado, mas a Paula,... A Paula acha que esta turma é mais dócil do que (9º A), que os miúdos são mais, apesar de terem dificuldades, são mais certinhos a trabalhar e, portanto, que realizaram, estiveram concentrados a fazer o astrolábio e calmos e...que lhes achou piada à maneira como construírem as coisas. Aqui as coisas decorreram sem sobressaltos...Pronto! Os outros grupos, também houve grupos em que eu tive que lhes mandar outra vez... completar, quanto mais não seja, concluir o relatório: qual era a altura e, na altura, tal como na turma B, na altura eles tiveram... teve que lhe ser proposto e eu perguntei-lhes: qual é a medida por que nós vamos...optar? É uma à sorte? Ou qual é delas? E até num dos grupos que tinha um diferencial de 10 metros exactamente, num que ia de 7 a 17...na altura de um mastro, duma árvore! na altura de uma árvore. *(Hm!... Hm!...)*...na entrada da escola. E a melhor aluna disse: Escolhe-se uma à sorte! Agora escolhe-se uma à sorte? Sabemos lá se tem muitos erros ou não! E aqui vocês têm uma diferença muito grande de valor... Não é melhor escolher a média? Sugeri eu... Ah! Então está bem, então vamos calcular a média. Pronto! Vamos calcular a média. Tive de chamar a atenção deste grupo porque a tal melhor aluna estava já ...a secretariar por eles e eu disse-lhes: Atenção. *(Hm!... Hm!...)*, que o secretário é... (*rotativo*) rotativo! Então, vamos lá, eu não quero sempre a Márcia a escrever. Quem é secretário?, perguntei eu. A Ana Sofia!	disciplinares… Problematização acerca de qual a medida que seria escolhida e porquê. Responsabilização pelas normas disciplinares instituídas e pela rotatividade da função de secretário no grupo.

	Então Ana Sofia faça o favor de escrever o que o grupo lhe disser para escrever! Mas é a Ana Sofia, não é a Márcia! Pronto! Depois eles lá concluíram, da média, eu creio que todos os grupos concluíram da média acerca disso. Portanto nesta turma, ficamos aqui! Não sei se queres fazer alguma pergunta... Mas não consegui fazer mais nada com esta turma, a não ser isso, nem sequer desenhar nada! . *(Hm!... Hm!...)*	
C 15	Tu aqui, ora bem, depois de eles terem feito as medições, eles conseguiram ainda ter tempo para fazer os cálculos da tangente...não é?	
I 16	Sim, vieram para a sala ...	
C 17	Não é? Mas tu perguntaste antes qual era o?...como é que eles iam fazer?	
I 18	Não, não! Trabalhei sempre grupo a grupo... Conforme eles iam chegando... Como nós não saíamos todos ao mesmo tempo nem chegávamos todos ao mesmo tempo e até porque a distância da nossa sala até ao pátio exterior… temos que ter um longo trajecto... e, portanto, aí uns vão mais depressa, outros vão mais devagar ...	Trabalho em pequeno grupo ao seu próprio ritmo
C 19	Havia uma professora que estava fora e outra que estava dentro?	
I 20	A gente percebia, mais ou menos, quando havia grupos que já tinham feito, um professor avançava para dentro da sala de aula, eles sentavam-se nos grupos, e começavam a trabalhar... A gente agora vai calcular a altura...e tal e...mas era sempre a trabalhar com os grupos e nunca com a turma toda...	… e não com o grupo turma
C 21	E, ... e...associaram, facilmente aquele ângulo que se mede na vertical e o outro ângulo...com o	
I 22	Isso ainda não discuti com eles,... ainda, ...(*Não?*) Não! Só lhes disse que tinham medido o ângulo e eles assumiram directamente que era o ângulo α...	
C 23	Que era aquele ângulo...	
I 24	Que era aquele ângulo... Ainda não discuti isso...	Confronto de práticas entre a investigadora (I) e a *critical friend* (C)…
C 25	Nem sequer perguntaram (*Nada!*) porque é que estava a usar aquele	

	ângulo e não (*nada, nada!*)...	
I 26	Eles acharam que o ângulo que mediram era aquele ângulo que estava desenhado na ficha (*Hm!...Hm!...*)... e avançaram por aí fora...Eu ainda não discuti, com nenhuma turma, a não ser com a [turma] B com quem comecei a discutir e que depois não tive tempo... Não discuti com nenhuma turma esse problema. Tenho que discutir...Porque o que está ali em causa são os triângulos semelhantes. Mas eu ainda não discuti. É uma coisa que me falta trabalhar com os miúdos (*Hm!...Hm!...*)...Pronto! Mais alguma coisa?	
C 27	...Não tiveram dúvidas, os alunos, em relação à construção do astrolábio, quando passam... (pelo menos os meus), a tendência é passar do pequenino para o grande? Ampliaram, não é... o transferidor? Eles marcaram os ângulos, primeiro, pelo transferidor, não é? (*Sim!*) E depois? Pediste para fazerem um astrolábio maior que o transferidor?	
I 28	Eu comecei por marcar a semicircunferência, no papel. E depois mandei graduar essa semicircunferência	Confronto entre a investigadora e a *critical friend* acerca dos modos de construção do astrolábio nas diferentes turmas e entre os diferentes grupos condicionados pelos recursos diferentes de que eram detentores.
C 29	Ah! Então está ao contrário	
I 30	Ao graduar essa semicircunferência, houve um grupo nesta turma, que tinha um transferidor que batia quase certo... (*Hm!*) com a semicircunferência. Foi o único em todas as três turmas. Portanto, aqueles não tiveram dificuldade nenhuma (*Claro!*) Todos os outros o transferidor era mais pequeno que a tal semicircunferência, porque eu dizia-lhes para aproveitarem ao máximo a cartolina, o pedaço de cartolina que eu lhes dei, para ficar uma coisa... que se visse e que pudesse ser manejável, e quando eles marcaram isso, eu pedia-lhes rigor, e para marcarem na extremidade da semicircunferência, eu disse-lhes para unirem o centro…. o centro da semicircunferência, fazendo passar com as, as...	
C 31	Ah! Deste essa informação?	
I 32	Dei....(*Hm!...Está bem*!) Porque eles perguntaram: Como é que agora	

	faço? A minha colega, a Paula, até lhes disse para unirem...	
C 33	Pois! Os meus não perguntaram ... (*Fizeram*?) Fizeram e... na turma H...	
I 34	Fizeram a olho?	
C 35	Sim e na turma H, a maior parte deles fez a olho. E na turma G, só tive uma aluna que ... que não teve atenção que tinha de passar no centro..	
I 36	Ah! Pois houve um aluno que pôs um bocadinho mais acima, mas na vertical, o que não há problema nenhum porque é praticamente no mesmo sítio, portanto ela tinha graduado assim, mas acho que em termos de rigor das medidas estava praticamente porque depois ela fazia passar pelo mesmo sítio (*Hm!...Hm!...*) Era praticamente o mesmo... Ah, ... essa da graduação foi assim ... Mas a Paula dizia para eles unirem,...unirem mesmo!... (*Hm!...Hm!...*) por um segmento de recta. Eu não lhes dizia assim, dizia só para prolongarem pela recta e só marcarem na parte final da semicircunferência, tal como estava no livro: eu mandava-lhes estar com o livro [como referência] (*Hm!...Hm!...*)... Ah!... não entreguei o relatório da 2ª aula, não porque os não tivesse corrigido, mas porque não tive tempo de os fotocopiar antes de lhos dar. Porque eu estou a ficar com as fotocópias dos trabalhos (*de todos*?) de todos os trabalhos Sim... Mas como não tive tempo de os fotocopiar antes de ir para a aula não lhos entreguei... Está?	A devolução dos relatórios devidamente anotados e classificados ficou condicionada pela necessidade de serem fotocopiados…
C 37	Está!	

6.3.3.2 A responsabilidade e autoridade partilhadas com o grupo

Conferência 3 – Relato da aula desenvolvida no 9º E, no dia 02/05/2005

	Turma/Data/ A investigadora (I) descreve à *critical friend* (C)	
I 38	Então, agora vamos para... o 9º E... Tive aula na segunda-feira, 02/05...e foi a [tarefa do manual que se encontra na] página 84, actividade 1...	

C 39	Portanto, com estes meninos estás na 3ª aula, é isso?	
I 40	Com estes meninos estava na 2ª aula..	
C 41	Ah, porque ainda não foram para a rua ... *(Não!)* com o astrolábio... *(Não!)*	
I 42	Estes estão na 2ª aula... Que é a turma que vai mais atrasada... Esta turma, nesta turma eu tenho os registos em cima do acontecimento...Isto é, eles têm aula e eu faço imediatamente o registo*...(Hm!, ...Hm!...)* Nesta aula, o que é que aconteceu de especial? Aconteceu de especial... que... fiz como fiz nas outras turmas...dei a tarefa, distribuí-os imediatamente em grupo, eles foram imediatamente para o grupo trabalhar...e... e... houve um acidente dentro da sala de aula porque a páginas tantas dei com um fulano a bater noutro.... *(Hm!, ...Hm!...)* e... depois vim a tentar perceber porque é que ele tinha batido, e percebi que ele... tinha batido porque inicialmente ele não estava a trabalhar em grupo... E eu tinha-lhes dito que precisava que eles, que o trabalho devia ser em grupo, que não era um a fazer, e tinha-lhes dado essa, portanto... tinha-lhes dado *feedback* no relatório, que o trabalho podia ser melhor se eles tivessem todos cooperado... *(Hm!, ...Hm!...)* Como eles estavam com aquela, com aquele *feedback* que eu lhes dei, eles pressionaram todos os elementos para trabalharem. Um deles não trabalhou, e, portanto, a avaliar pelo que eles disseram um deles deu um murro, outro puxou-lhe os cabelos e quando este puxou os cabelos o outro virou-se (*pois!*) ao primeiro. Tive que os separar.., que a coisa estava preta, mesmo, tive que os separar porque a coisa estavam mesmo mal e,... e disse ao aluno, que tinha começado a bater no outro, para se sentar no grupo...Ele recusou-se...Pediu-me para o tirar do grupo...	Os alunos foram providos com os recursos suficientes 3 dos 4 alunos assumem a autoridade e responsabilidade na actividade necessária à tarefa e pressionam o 4º elemento que está envolvido em actividades alheias à tarefa… A professora explicita, oralmente a através do *feedback* escrito, a necessidade de todos trabalharem cooperativamente Registo de violência em plena sala de aula Os elementos do grupo sentem-se responsáveis pelo trabalho realizado e pressionam os elementos do grupo.
C 43	O que começou foi o que não queria trabalhar, foi? Não?	
I 44	Não! O que começou a violentar o outro foi o que estava a obrigar o outro a trabalhar...(*Ah!,... Hm!... Hm!...)* Mas depois como é que se resolveu? Porque eu não percebi nada do que se estava a passar,... não	A dinâmica da aula continuou mas

	tinha que perceber! Não é! pois andava [a supervisionar o trabalho] nos grupos... E pedi-lhes que eles me explicassem e eles não me queriam explicar: o que bateu só queria sair do grupo! O que foi batido disse para o tirar do grupo porque não conseguia trabalhar com ele porque ele era conflituoso *(Hm!... Hm!...)*... Pedi ao que bateu para ir para o grupo, recusou-se! Pu-lo fora do grupo, separado, sentado e a pensar no que tinha feito...os restantes elementos do grupo continuaram a trabalhar e eu continuei a gerir a aula mas muito preocupada porque como é que eu ia resolver aquilo? Pronto, dei o resto de toda a aula, por várias vezes ia falar ao miúdo que tinha batido*(Hm!... Hm!...)*.., e perguntar se ele estava mais calmo, se já estava mais sereno mas ele... ele chegou a chorar!, a chorar mesmo de verdade... o miúdo que bateu no outro chegou a chorar mesmo de verdade...	naquele grupo havia uma situação de tensão provocada pela responsabilização do trabalho a realizar
C 45	Pois, porque aquilo, aquilo... mexeu mesmo com ele...	
I 46	Mexeu, mexeu com eles e depois mexeu comigo... e como ele não voltasse outra vez ao grupo e como o grupo também não estivesse... muito... receptivo a tornar a recebê-lo, aquilo começou-me a preocupar... Mas de qualquer das maneiras*(Hm!... Hm!...)*, os grupos funcionaram na mesma, perceberam que tinha havido ali uma confusão, mas continuaram a funcionar na mesma, e ao tempo marcado, recolhi os relatórios, inclusive daquele grupo, recolhi os relatórios e... mandei-os todos para os seus lugares normais, porque eles estavam a trabalhar em grupos... Mandei-os para os seus lugares e comecei a fazer o ponto da situação da aula. Comecei por falar das relações que estavam cá [na proposta da tarefa], da relação entre o seno ao quadrado de CAB e do coseno e de demonstrar, na mesma, e depois passar para a fórmula fundamental da trigonometria, pedi-lhes para eles registarem... Falei da relação do seno sobre o coseno e passei para a relação entre o seno, coseno e a tangente, de forma geral,… Falei das relações entre senos e co-senos de ângulos complementares, e, nesta aula, não tive praticamente tempo para... avançar muito mais...	Mudança de dinâmica da sala de aula: antes em grupo e agora no grupo turma com a professora a fazer o ponto da situação, a sistematizar e focar os aspectos essenciais Supervisão do

	Entretanto eu fui dar uma vista de olhos pela turma toda. O que é que se estava a passar? Verifiquei que o miúdo que tinha apanhado, o Nuno Pinto, que esse,.. o que é normal, não é!, continuava com dificuldades a passar o que estava no quadro... O tal que bateu tinha passado tudo o que estava no quadro	trabalhos dos alunos, em geral…
C 47	Mas esse estava sozinho? Não ?	
I 48	Estava no seu lugar, normal (à beira da Márcia). Ele depois que foi individualmente para o seu lugar, (continuou...) trabalhou naturalmente... e regularmente... E fui dar uma vista de olhos para ver o que se estava a passar na turma toda...Quem é que estava a passar, quem não estava, porque.... me parecia que alguns deviam não estar a passar porque estavam a falar... Só podem falar se tiverem tempo,..., como não havia muito tempo para falar....e fui dizendo a alguns, a uns para passarem, a outros para se calarem e... fui verificar como estavam os alunos todos enquanto estavam a acabar de passar o que estava no quadro, que eu tinha dado assim um espaço...	
C 49	Tu recolheste os trabalhos antes de ir para o quadro, não foi?	Recolha dos relatórios no fim do primeiro ½ bloco, antes de fazer a sistematização e correcção da tarefa com toda a turma
I 50	Sim, recolho sempre antes de passar para o quadro... Portanto, recolho no fim do trabalho de grupo*(Hm!... Hm!...)*... e depois faço a sistematização... e cada um escreve no seu caderno (*Sim, sim!...*) Pronto. […] e depois pedi ao grupo para, no fim da aula, vir falar comigo... ao grupo, a todos os elementos do grupo. A todos os elementos do grupo. Pronto, com esses elementos do grupo eu tentei descrever a situação, tentei fazer o filme, ó para trás, do que é que se tinha passado *(Hm!... Hm!...)*..., para ver também se eles concordavam com a descrição que eu estava a fazer...Portanto, o que me apercebi, daquilo que eles me informaram: é de que o grupo queria muito que ele trabalhasse, e isso foi expresso pelo miúdo que eu vi apanhar tareia, não é? *(Hm!... Hm!...)*..., e disse para ele estar atento e tirar os *phones*, que a professora já lhe tinha dito para tirar os *phones* no início da aula... Ele estava lá com os *phones*, e portanto, não ouvia o que os outros estavam a dizer (*Claro*!)...	Esclarecimento do que se tinha passado e constatação de se a interpretação dada era a correcta… Falta de responsabilidade do José pela sua aprendizagem e comprometimento do trabalho do grupo pela sua não cooperação – pela recusa em ouvir com os *phones* colocados… Explicitação de

	Para tirar os *phones*... e deu-lhe um murro, no braço. Estava do lado direito dele e deu-lhe um murro no braço esquerdo. E dizia-me o José, o tal miúdo que deu tareia, disse-me que não tinha ligado nenhuma, ao murro que ele lhe tinha dado, mas a seguir o primeiro tornou a chamar-lhe à atenção e puxou-lhe os cabelos. E ele disse que aí não se tinha contido, e perguntou-me se eu não fazia o mesmo na situação dele? Que é apanhar, apanhar, apanhar... ele dava-lhe, também, a seguir. Não lhe respondi*(Hm!... Hm!...)*..., e eu disse que, mesmo que a atitude do miúdo que estava com os *phones*, fosse desadequada, isso não era motivo suficiente para o outro lhe bater*(Hm!... Hm!...)*..., mesmo que outro tenha um comportamento desadequado... Portanto, eu pedi ao Nuno Pinto que pedisse desculpa ao José Eduardo pela violência que tinha exercido sobre ele. E o Nuno Pinto pediu desculpa, exactamente por isso, e ele desculpou. Depois disse ao José Eduardo que a violência também não se responde com violência e portanto, disse-lhe, que pedisse desculpa ao Nuno Pinto pela violência que tinha exercido sobre ele. E ele pediu, naturalmente. E depois disse ao José Eduardo: Agora vais pedir desculpa ao grupo, por teres não estado com um comportamento adequado no grupo: foi isso tudo que despoletou tudo o resto que veio a seguir... e ele ficou muito renitente *(Hm!... Hm!...)*..., porque ele achava que não devia ter razão nenhuma para pedir... desculpa ao grupo mas depois eu disse-lhe que foi isso que despoletou tudo o resto, só o resto aparece porque há esse teu comportamento que não é adequado ao trabalho. Tu estavas a faltar ao respeito ao grupo...Ele lá pediu desculpa..., Depois eu pedi à... Eu disse que ele, o José Eduardo, já lhe tinha dito, individualmente, mas disse ao José Eduardo que ele era um miúdo cheio de capacidades. (E é. Do meu ponto de vista é.) Mas depois como ele tem um comportamento conflituoso, e não íamos ali estar a ver porque é que ele tinha um comportamento conflituoso, era um facto*(Hm!... Hm!...)*... Acontecia que ele depois não aproveitava todas as suas	alguns princípios fundamentais: respeito pelo outro, não violência Tentativa de recompor a situação depois de se esclarecer os pontos de vista…e de responsabilizar cada uma das partes Identificação e explicitação no grupo de qualidades e defeitos/limitações do José… Solicitação do

	capacidades que ele tinha porque depois não se sabia comportar...Que não se sabia comportar e aquilo era um descalabro...E não funcionava... Então eu disse, pedi ao grupo que tivesse alguma compreensão por aquele aspecto específico do José Eduardo... compreensão não era aceitação, era compreender o que se passava com ele para o ajudar, e pedi ao José Eduardo que tendo consciência de como ele é conflituoso...Como é que eu hei-de dizer? Tivesse algum cuidado no relacionamento que ele tem com o grupo. E perguntei-lhes se podia contar com... com a boa-vontade deles e com a disponibilidades deles para poderem,... tentarem fazer isso... Porque eles o que tinham pedido era para que ele saísse do grupo, quer o próprio interessado (*Claro*!), quer os outros que estavam fartos de o aturar (*É...É..Eles são sempre assim!* .) E perguntei um a um se eles estavam nessa disponibilidade. Comecei pelo Nuno Pinto, e ele disse-me que sim. Perguntei ao José Eduardo e ele também me disse que ia fazer esforço. Perguntei à Cátia e perguntei à Patrícia e elas disseram-me que sim! Então vamos lá tentar, disse eu e depois deixei-os ir, ao intervalo e ficou resolvido, do meu ponto de vista, vá lá, na altura, com sucesso (*Sim! Sim!*). Mas foi uma das grandes preocupações durante toda a aula, mesmo enquanto estava a fazer as coisas no quadro, eu tinha essa preocupação, porque não sabia como ia ser o desfecho daquilo: podia ser uma desgraça, eles saírem todos zangados, Pronto! mas não! *(Hm!... Hm!...)* Na aula a seguir, que foi quarta-feira, dia 4 de Maio... Ah! Nesta aula eu entreguei-lhes o tal... relatório de grupo, da primeira. Dei-lhes, entreguei-lhes o relatório... com os comentários. Portanto, entreguei-lhos logo no início da aula, até quando eles estavam em grupo...	compromisso individual de cada um dos elementos do grupo pelo desempenho do mesmo com vista ao envolvimento na aprendizagem matemática. Responsabilização e compromisso de cada um pela gestão do grupo e pela aprendizagem… Reflexão da professora Entrega do relatório da 1ª actividade realizada com o *feedback* escrito.
C 51	O primeiro relatório, não é?	
I 52	O primeiro relatório. Estávamos na segunda aula e entreguei-lhes o relatório na segunda aula. Pronto e levei os relatórios...	

	Na 4ª feira, foi a aula de irmos medir árvores... 4ª feira, foi dia... dia 4.	

6.3.3.3 A responsabilidade e autoridade partilhadas com os pais e encarregados de educação

Conferência 4 – Relato de aulas desenvolvidas no 9º E, no dia 09/05/2005 e 11/05/2005

E depois, no fim da aula [do dia 02/05/2005] escrevi dois recados, aos pais porque havia um miúdo estava sistematicamente a falar e a outro porque não passava nada para o caderno e que eu já tinha mandado um recado para a mãe a dizer que não passava nada, e a mãe tinha respondido e tinha dito para ele... passar e estar atento *(Hm!... Hm!...)*...

	Turma/Data/A investigadora (I) descreve à *critical friend* (C)	
I 53	[…] Ah!, tenho a identificar que pedi a 2 alunos, ao Samuel e ao Francisco que me mostrassem os recados assinados que eu tinha mandado para os pais e aí eles disseram, um disse que o pai já não estava em casa há muito tempo, que no fim de semana não tinha estado, mas de facto aquele aluno tinha-me faltado na última aula, e …eu já lhe tinha escrito o recado há uma semana atrás! Portanto, não seria por causa disso que ele não me trazia assinado… Relativamente ao Francisco também me disse que a mãe dele já sabia…que já tinha assinado …e que só se tinha esquecido mas que na próxima aula já trazia… Fiquei zangada com eles e disse-lhes que tinha de contactar os pais deles porque… não fazia sentido eles não me trazerem os recados assinados e portanto ia contactar os pais porque não podia assumir a responsabilidade de eles não se portarem adequadamente e … e portanto estarem-se a perder e eu não podia assumir essa responsabilidade sozinha! Eles ainda tentaram pedir-me para eu não lhes, para eu não telefonar para casa, prometendo-me…isto mais o Samuel, o Francisco não falava…Prometendo portar-se melhor que a partir dali mas…de facto esse tipo de situações…	Solicitação dos cadernos diários com os recados enviados pela professora com tomada de conhecimento dos pais através de assinatura… A professora verbalização a sua posição relativamente a actuação pouco responsável dos alunos e informa que terá de contactar telefonicamente os pais...

C 54	O Samuel é o que tem os pais que se interessam ou nem por isso?	
I 55	Os pais interessam-se, mas…interessam-se mas dão-lhe roda livre! …(*Hm!...Hm!...*)… Quer dizer, o pai interessa-se, o pai também é professor e portanto…(*Hm!...Hm!...*)…diz que não pode ser mas acaba por não fazer nada! …(*Hm!...Hm!...*)…	
C 56	Sim, sim, estou a ver!	
I 57	Pronto! E ele ainda tentou demover-me, de lhe telefonar e, portanto eu saí da aula a pensar que tinha mesmo que lhes telefonar porque se com aquela promessa se eu não a cumprisse eu nunca mais,… nunca mais acreditavam em nada do que eu dizia … E disse-lhes que ia contactá-los, que eles esperassem que sim e que eu ia fazer isso porque não podia assumir aquela responsabilidade. […]Ah, não! Nesse dia, claro, nesse dia telefonei aos pais: descobri que o Francisco não tinha assinado nada, que a primeira assinatura que me mostrou, *(Falsa?)* tinha lá uma assinatura, a mãe não tinha conhecimento de nada … e, portanto, aquilo quando me disse que a mãe já sabia, não sabia de nada e, quando eu lhe telefonei ela ficou a saber, pela primeira vez o que se estava a passar…concordou comigo que o miúdo tinha bastantes capacidades …Concordou porque eu o explicitei, e explicitei aos pais que estava a telefonar-lhes mais a pedir-lhes ajuda para podermos fazer alguma coisa pelos miúdos …(*Claro!, Claro!*) porque… não o que eu pretendia era que eles aprendessem e que eles tivessem sucesso mas que eles estando sempre a falar, era impossível …e se eles… se não houvesse,… estava a tentar uma outra maneira de fazer com que eles estivessem mais atentos e que eles dessem mais valor ao que se passava dentro da sala de aula … O pai do Samuel agradeceu, a mãe do Francisco também …E a mãe do Francisco explicitou que tinha dificuldades também de trabalho com ele porque ela achava e os professores diziam que ele tinha capacidades para muito mais mas que depois não punha a render as capacidades e que isso	Necessidade de se ser coerente Explicitação aos pais do porquê do telefonema e solicitação de ajuda para envolver os respectivos filhos na sua aprendizagem matemática… Os pais agradecem o contacto e explicitam dificuldades em mobilizar os filhos para aprenderem.

	era complicado para ele até! O pai do Samuel disse que não imaginava o número de faltas que ele, que ele estava a dar (*Exacto!*), que não fazia sentido nenhum, que não percebia porque ele faltava tanto e que ele estava longe de saber o número de faltas que ele tinha dado e disse-me que inclusive que no sábado anterior, no sábado ou na sexta-feira anterior que a directora de turma lhe tinha telefonado e que ele ficou, quando a directora de turma lhe disse quantas faltas é que ele tinha que ele, que para ele era uma novidade… Disse-lhe o mesmo e disse que ele ia fazer doutra maneira, porque não podia acontecer e tal…pronto. Na 4ª feira seguinte eu disse ao Francisco que queria falar com ele e ele disse-me também que queria falar comigo no fim da aula. Reparei que o Francisco já escreveu durante toda a aula (*Hm!...Hm!...*)… já escreveu durante toda a aula, e o Samuel já esteve melhor e houve uns alunos que disseram que era preciso ter cuidado comigo, com a professora porque a professora tinha andado a fazer queixinhas aos pais e que se eles não se pusessem à tabela …	Mudança de atitude e enquanto o Francisco está atento, participa activamente e regista no caderno diário, o Samuel muda menos radicalmente de atitude…Isto é, ambos se envolvem na dinâmica de sala de aula mas no Francisco é mais notória e radical…
C 58	(Risos!) Pode ser que sim! Eu acho é que eles esquecem muito rapidamente…	
I 59	E, de facto, os alunos já sabiam todos que eu já tinha telefonado para aqueles dois e, portanto, tinham algum cuidado!	
I 60	Ah, nesta aula o Francisco, de facto, passou tudo …O tal Francisco a quem eu já tinha mandado dois recados por que não passava nada, passou tudo e, sempre que eu fazia alguma pergunta porque estava atento, e é este o *feedback* que eu tenho do miúdo ele respondia e respondia sabendo o que estava a fazer. Portanto desde há muito tempo esta foi uma das aulas em que ele esteve atento e que aprendeu o que estava a fazer. Eu cá para mim, ele naquela aula, ele conseguiu recuperar tudo da trigonometria, o que *(Pois!)* nas outras aulas todas em que nunca esteve atento nunca passou nada e portanto …significa, de facto e dá conta, dá conta das capacidades do	De facto houve mudança de atitude do Francisco passando a envolver-se: participando activamente na dinâmica da aula

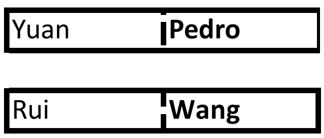
	miúdo…	

Conferência 5 – Relato da aula desenvolvida no 9º E, no dia 09/05/2005 e 11/05/2005

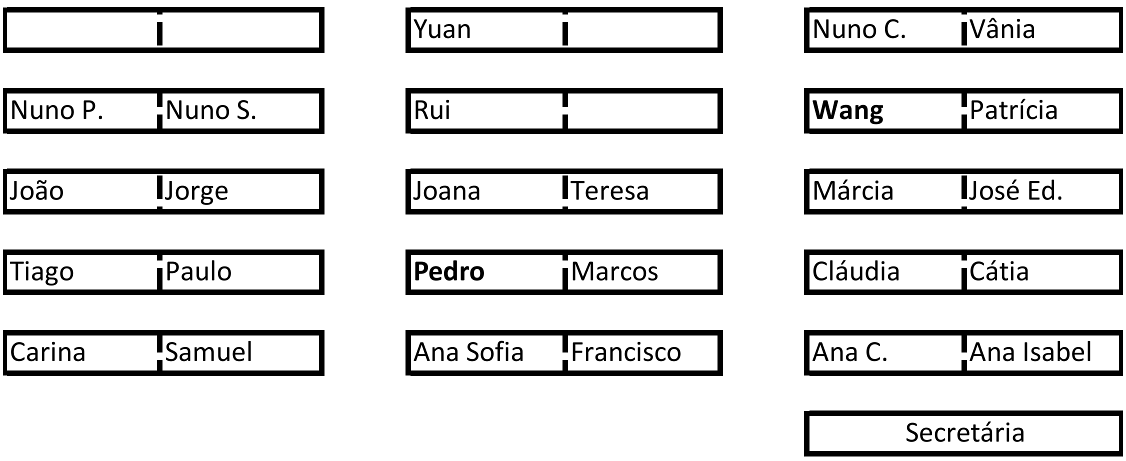
"Também no início da aula aborreci-me com o Wang, Yuan e o Pedro porque se preparavam para estar na conversa durante a aula. Ficaram no fim da sala, numa posição triangular:

Pedi-lhes que adequassem o seu comportamento ao que me responderam afirmativamente mas como a "fazerem-me" o favor. Entendi que a sua resposta encerrava a intenção de que quando estivesse menos atenta passassem a falar e então radicalizei a minha posição e obriguei-os a mudar de lugar" (*in* diário da turma) conforme se pode observar no esquema dos lugares ocupados na sala de aula, antes e depois da intervenção da professora.

Posição dos alunos na sala de aula no dia 11/05/2005



Antes



Posição dos alunos após a indicação/ordem da professora

Figura 6.9: Posição dos alunos após indicação dos lugares aos alunos

I 61	[…]Eu ainda me indispus com o aluno chinês, com o Yuan porque estavam na brincadeira e eu disse-lhes que não podia ser, mandei o Pedro	

	para a frente, mandei o Wang…	
C 62	Mas isto na altura de quê? que é que estavas a fazer?	
I 63	Na 4ª feira, na 4ª feira (*4ª feira*?) logo no início para começar a aula, eu queria começar a trabalhar com eles, queria ir fazer aquela parte … de identificar o …, como é que?	
C 64	Mas já na Geometria ou ainda não?	
I 65	Na Geometria não! (*Ainda na trigonometria*) Ainda estava na trigonometria. E queria fazer e eles já se estavam a preparar para começar a conversar …(*Hm!...Hm!...*)…e então eu fui lá atrás e disse-lhes que não queria que eles estivessem a conversar e mandei o Pedro para a frente, o Wang para o lugar dele à beira da Patrícia e deixei o Rui sozinho, o Yuan atrás sozinho e o Yuan disse: Olhe que eu não tenho medo da professora!	Reorganização dos lugares ocupados pelos alunos na sala de aula. Yuan em tom provocatório
C 66	Podes telefonar à vontade para o pai, para a mãe …Olha que realmente…(Sorrisos!)	Aqui contactar o encarregado de educação não surtiria efeito pela dificuldade do pai compreender o português
I 67	Esse, esse, o pai não percebe nada de português, por isso podia mesmo! E ele disse-me que não tinha medo de mim! E eu disse-lhe que não queria que ele tivesse medo de mim!	
C 68	Exactamente!	Esclarecimento de qual a atitude e comportamento esperados na sala de aula
I 69	Não era isso que eu queria! Queria que ele tivesse respeito, que fosse bem educado, que não, não lhe admitiria isso! E	
C 70	Trabalhar!	"Os alunos obedeceram-me e o trabalho na sala de aula fluiu" in diário da turma
I 71	[…]E ele demorou algum tempo a aceitar porque é um bocado…(*Hm!...Hm!...*)… rebelde mas depois assumiu e durante a aula o Pedro foi para a frente, o outro [Wang] foi para o sítio e estiveram mais ou menos atentos… O Wang conseguiu estar atento, o Yuan nem por isso. Estivemos a fazer então exercícios sobre trigonometria…	

6.4 Trabalho colaborativo entre a professora investigadora e a *critical friend*

A *critical friend* e a professora investigadora mantinham uma relação de confiança que lhes permitia trabalhar em projectos comuns e partilhar visões, angústias e mesmo utopias acerca da educação e das práticas de sala de aula. Neste contexto, a professora investigadora e a *critical friend*, relatavam nas “**Conferências”**, regularmente nas tardes de sábado, uma à outra os acontecimentos havidos na semana que findava pedindo esclarecimentos, questionando formas de fazer, opções tomadas e as respectivas razões. Estas conferências foram gravadas em cassetes áudio. O objectivo destas conferências era permitir e promover o diálogo/discussão entre a professora investigadora e a *critical friend*, reflectir acerca do que tinha funcionado bem ou mal e de quais os aspectos que poderiam ser melhorados. A *critical friend* seria uma interlocutora especial para a professora investigadora porque agiria como alguém que estava por dentro, fazendo uma escuta activa, clarificando ideias, encorajando ao esclarecimento das especificidades e dando tempo para compreender completamente o que se estava a discutir e/ou a partilhar; apresentando críticas construtivas com integridade e sempre zelando pelo sucesso do trabalho a realizar. A dinâmica permitiu reflectir no *feedback* dado sem haver necessidade de defender as práticas e a reflexão das críticas.

2005		**Ensino da professora investigadora**	Gravação áudio
	semana	Instrumento aplicado	**“Conferências”** Investigadora e *Critical friend*
Abril	3ª		
	4ª		30/04
Maio	1ª	Listagem Dinâmica de Perguntas	07/05
	2ª	Listagem Dinâmica de Perguntas	14/05
	3ª	Pré-teste-competências	
	4ª		26/05
Junho	*1ª*		04/06
	2ª	QEAME– avaliação da mediação Pós-teste-competências	

Tabela 6.26: Datas das conferências realizadas

Realizaram-se 5 "Conferências" das quais apenas uma, a de 26/05 não foi ao sábado mas num feriado nacional. O facto de ser ao sábado tinha a ver com os horários das professoras em causa e as disponibilidades de trabalho conjunto.

Inicialmente os diálogos eram apenas ouvidos. Rapidamente se percebeu que muito do que era dito se perdia e os tópicos eram pouco esclarecedores da riqueza dos diálogos existentes: optou-se por fazer gravações áudio dos diálogos. Esta actividade de descrever a dinâmica de sala de aula, de contar os incidentes críticos com o colorido emocional que lhe estava associado também era acompanhado por confidências relativas a aspectos da dinâmica de sala de aula, relativos a dilemas que as professoras sentiam, a angústias relativas ao ensino e à significância da aprendizagem promovida e à promoção do desenvolvimento das competências essenciais.

As transcrições destes diálogos, em formato electrónico, foram feitos pela professora investigadora.

A partir do diálogo e confronto de práticas das Conferências:

- ajustava-se as práticas para a semana seguinte: as fichas de trabalho onde se explicitavam as tarefas eram melhoradas, os materiais necessários eram revisitados, os timings eram questionados, a ordem de implementação era problematizada;
- questionava-se a dinâmica de sala de aula e de quais as razões que sustentavam as opções tomadas;
- reflectia-se acerca dos comportamentos e atitudes dos alunos relativos à aprendizagem, a partir dos incidentes críticos havidos e eram inventariadas/ questionadas as possíveis razões que levavam a essas situações, etc.

inventariavam-se opções pedagógicas das escolas que formatavam a feitura de turmas, a distribuição (ou não) dos alunos retidos pelas turmas da escola, etc. Nestes diálogos as professoras

- explicitavam a mudança de procedimentos na dinâmica de sala de aula a partir da experiência e/ou comentários da outra professora.

"*Ah! Aqui nesta aula, como eu tinha estado a falar contigo no sábado anterior, pus em cada grupo uma figura com um pentágono*"

- comparavam as aprendizagens/dificuldades relativas às tarefas nas diferentes turmas:

Professora investigadora fala "*Conclusão: eu senti que de todas as três turmas, eu senti que nesta foi, que nesta foi a que tive mais dificuldade de fazer esta tarefa com os miúdos…*

- Reflectem acerca da qualidade da aprendizagem e das aprendizagens dos alunos - Professora investigadora fala e a professora B escuta – 9º B, aula em que foi dada a tarefa do tronco de cone:

"*Creio que eles trabalharam todos, mais afincadamente, o cálculo do raio e essas coisas todas… Agora eu não me posso é assegurar que todos tenham feito as mesmas aprendizagens! Porque uns trabalharam mais nos cálculos, outros trabalharam mais na construção [do tronco de cone], e as construções para eles foram um desafio, eu achei que eles gostaram de fazer as construções*"

- Reflectem acerca da tarefa: dos conteúdos, dos processos e dos materiais que são mobilizados Professora investigadora fala e a professora B escuta – 9º B, aula em que foi dada a tarefa do tronco de cone:

"*Do meu ponto de vista, observando este tipo de tarefa, eu creio que esta é uma tarefa muito completa porque alia à parte da construção o uso do compasso, o uso do transferidor, parecendo que não, acho que estes elementos são todos importantes: o uso do compasso, o uso do transferidor, a determinação do raio de um círculo que eu não conheço, que tenho de conhecer que é, como tu disseste, trabalho com as equações; depois tenho o cálculo com o Teorema de Pitágoras para a altura, tenho a semelhança de triângulos, esta tarefa praticamente varre a geometria toda! Tu não podes fazer isto sem as semelhanças! Não podes fazer isto sem Teorema de Pitágoras; não podes fazer isto sem determinar perímetros nem áreas de círculos, de sectores, (Exacto! – professora B confirma o que a professora investigadora está a reflectir)… E depois tem outra coisa que eu acho que é interessante: a construção, chegar ao fim é a construção: vai aos volumes…*"

- Reflectem acerca da pertinência do ensino ser feito a partir das definições ou não - Professora investigadora fala e a *critical friend*, a professora B escuta – 9º B, aula em que foi dada a tarefa do tronco de cone: "*Não! Não! Pode ser razão para haver discussão para vermos que definição damos aos miúdos… se o nosso ensino trabalhar muito a partir de definições! Porque aqui até ao nono ano, (não queremos assim tanto rigor! – professora B contrapõe) não é tanto as definições mas é o saberem trabalhar com os, do meu ponto de vista, isto é do meu ponto de vista, que não sei se coincide com o do programa ou não!, é saberem usar as ferramentas matemáticas, quer sejam polígonos ou outra coisa qualquer e saberem utilizá-las para resolver problemas! De cidadania, inclusive!*"
- Comparam a natureza de diferentes tarefas: a que implementaram e uma outra que vem formulada no Caderno de Actividades Ex. 8, pág.51 - Professora investigadora fala e a professora B escuta – 9º B, aula em que foi dada a tarefa do tronco de cone

" *Mesmo assim não se assemelha! Não se assemelha porque eles só têm que ir buscar o raio do círculo menor! E o problema que nós lhe demos é exactamente ao contrário! (precisamente! - confirma a professora B) Só temos o raio do círculo menor (Sim! Sim! - concorda a professora B) Eles têm a geratriz! Aqui têm directamente as alturas. Não precisam de fazer mais passo nenhum! (isto é muito mais simples! – confirma a professora B) Não tem nada a ver! (é muito mais simples! - confirma a professora B) Por isso é que eu acho que o problema que nós temos eu acho que é genuinamente um problema! É genuinamente um problema porque eles não têm os dados e têm que arranjar maneira de lá chegar! Enquanto que este[o do caderno de Actividades], eu acho que isto é quase um exercício: só tenho de calcular a área (Exacto! - confirma a professora B) daquele círculo ali e está na posição do cone! Enquanto que o nosso está ao contrário! (Exacto! - confirma a professora B)*"

7. Análise de dados

Neste capítulo trataremos da análise de dados, na sua maioria quantitativos provenientes da recolha através de vários questionários. Assim, no item 7.1 faremos a análise de dados provenientes do questionário acerca do ensino, da avaliação e do modo de estudar dos alunos – QEAME (consultar pp. 100-101); no item 7.2 faremos a análise dos dados relativos às competências desenvolvidas e que se obtiveram pela resposta ao pré-teste, Diagnóstico e pós-teste, Teste (consultar pp. 101-104); no item 7.3 analisaremos os dados provenientes da Listagem Dinâmica de Perguntas (consultar pp. 104-105).

7.1 Questionário acerca do ensino, da avaliação e do modo de estudar dos alunos - QEAME

O questionário acerca do ensino, da avaliação e do modo de estudar dos alunos, QEAME (consultar pp. 100-101), foi respondido por 48 alunos da Escola A, distribuídos por três turmas da professora investigadora e por 15 da Escola B, de uma única turma da *critical friend* numa das últimas aulas do 9º Ano.

7.1.1 Parte I – As professoras

A parte I é constituída por 22 questões em que a escala utilizada é uma escala de 1 a 5 e que estão agrupadas pelas dimensões definidas *a priori* e acima especificadas. Na Tabela 7.1 apresenta-se a pontuação média obtida em cada dimensão (média aritmética das respostas obtidas nas questões correspondentes).

Dimensão definida *a priori*	**Professora A**	**Professora B**
Esforços deliberados no sentido do bom ensino	3,8	4,1
Objectivos e padrões claros e bem definidos	3,4	3,7
Organização e quantidade de trabalho	2,6	2,7
Interacção	3,9	3,7
Avaliação permanente	3,5	3,9
Estímulo à independência do aluno	3,3	2,8

Tabela 7.1: As percepções dos alunos acerca da professora

As dimensões referidas podem ligar-se com as condições que tornam possível a mediação didáctica da aprendizagem em situação escolar. A partir do questionário fica claro que os alunos estão no centro do trabalho realizado, com uma avaliação permanente no sentido de rentabilizar ao máximo as potencialidades dos alunos e havendo um esforço por parte do professor para entender as dificuldades que os alunos possam ter.

Os alunos reconhecem, nas duas professoras, esforços deliberados no sentido de um bom ensino. Relativamente aos objectivos e padrões claros e bem definidos atribuem uma pontuação média bastante elevada à professora B, *critical friend*; relativamente à professora A, professora investigadora, obtém-se uma pontuação positiva mas muito próxima do valor neutro. O estímulo à independência do aluno é uma dimensão que não é percepcionada pelos alunos de forma positiva na professora B, *critical friend*. Apesar da professora A, professora investigadora, ter como pontuação média 3,3, esta situa-se muito próxima do valor neutro. Quanto à dimensão da interacção ambas as professoras apresentam uma média bastante alta contribuindo para isso aspectos como: a professora motiva os alunos no sentido de darem o seu máximo, fornecendo normalmente informação acerca do modo como os alunos vão progredindo; demonstrando interesse real naquilo que os alunos têm para dizer (escutando) e estando disponível a aprender com os seus alunos de acordo com as questões específicas do questionário.

7.1.2 Parte II – Currículo em acção

A parte II do questionário admite diferentes escalas para diferentes questões. A questão 42, relativa ao tipo de avaliação realizada e aos instrumentos de avaliação considerados, só admite 4 menções possíveis. Posteriormente foi feita uma equivalência à escala de 1 a 5 para facilitar a leitura e análise. As questões 35 e 43 só admitiam dois valores: sim ou não. Em todas as outras questões a escala utilizada é de 1 a 5. Os resultados serão apresentados e discutidos por dimensão de análise.

7.1.2.1 O professor distingue entre conceitos, leis e regras

Esta categoria de análise é trabalhada com as respostas à questão 32. De acordo com os resultados podemos afirmar que, segundo as percepções dos alunos, estes consideram que a professora A (média 4,3) distingue explicitamente (quase) sempre entre conceitos, leis e regras. Os alunos da professora B têm uma percepção análoga atribuindo-lhe, no entanto, uma classificação inferior (média 3,9).

7.1.2.2 Tipo de aulas e formato de trabalho

Esta categoria de análise é trabalhada a partir da questão 30 e os resultados são os que constam na Tabela 7.2. Os alunos da professora A, no que respeita à sua aprendizagem, valorizam, praticamente de igual modo, o trabalho individual (4,0), o trabalho de pares e o trabalho de grupo (3,8). No que respeita aos alunos da professora B o trabalho individual e o trabalho de pares aparecem como igualmente significativos (3,8).

As aulas de tipo expositivo são as menos significativas para os alunos de ambas as professoras: com média de 3,0 para a professora A e média de 2,6 para a professora B.

	Professora	
$\bar{x}(média)$	**A**	**B**
$\bar{x} \geq 4{,}0$	Trabalho individual (4,0)	
$3{,}7 \leq \bar{x} \leq 3{,}9$	Trabalho grupo (3,8) Trabalho pares (3,8)	Trabalho individual (3,8) Trabalho de pares (3,8)

Tabela 7.2: Tipo de aulas e formato de trabalho importantes para a aprendizagem

Poderemos inferir a partir das respostas dadas pelos alunos que as professoras A e B diversificam o tipo de trabalho na sala de aula e este é considerado, por eles, como significativo para a aprendizagem. Para além das tradicionais aulas expositivas, que os alunos consideram ser as menos importantes, há aulas de trabalho de pares; para os alunos da professora A há, também, aulas de trabalho de grupo. Daqui podemos inferir que a mediação realizada pelas duas professoras se centra no sujeito epistémico do aluno em detrimento do sujeito epistémico do professor. Podemos assim inferir que há um equilíbrio entre o trabalho individual e social em aulas centradas no trabalho dos alunos. Enquanto que para a professora A o social é materializado através de trabalho de grupo e de trabalho de pares, para a professora B é materializado apenas pelo trabalho de pares.

7.1.2.3 Tipo de tarefas e/ou recursos implicados

Esta categoria de análise é trabalhada na questão 33 e os resultados são os seguintes:

	Professora	
$\bar{x}(média)$	**A**	**B**
$\bar{x} \geq 4{,}0$	Resolução de Problemas (4,2)	Resolução de Problemas (4,1)
$3{,}7 \leq \bar{x} \leq 3{,}9$	Act. c/ calculadoras (3,7) Trabalhos individuais (3,7)	Trabalhos individuais (3,7)
$3{,}4 \leq \bar{x} \leq 3{,}6$	Act. c/ materiais manipuláveis (3,6) Relatórios de grupo (3,6) Projectos (3,5)	

Tabela 7.3: Tipo de tarefas/actividades e/ou recursos implicados na aprendizagem

Os alunos apontam a resolução de problemas como a actividade mais importante, na sala de aula, para a sua aprendizagem (poderíamos questionar, aqui, contudo qual o entendimento dado pelos alunos à designação resolução de problemas). Ao analisar o quadro 3 constata-se que os alunos da professora A valorizam o mesmo que os alunos da professora B para além de considerarem outro tipo de tarefas (trabalhos individuais, relatórios de grupo, projectos). Nas tarefas da professora A os alunos identificam, ainda, a importância de tarefas com recurso às calculadoras e materiais manipuláveis. Apesar do trabalho individual ter igual importância nas duas professoras, os alunos da professora A identificam com importância análoga, na sua aprendizagem, os relatórios de grupo e os projectos (trabalho não individual). Dos dados apresentados podemos depreender que enquanto a mediação da professora B se centra no trabalho individual e na resolução de problemas, a mediação da professora A é caracterizada por uma gestão equilibrada do trabalho individual e social, assentando numa larga diversidade de tarefas e de recursos.

7.1.2.4 Memorização intensiva versus compreensão

Esta categoria de análise é trabalhada a partir das respostas às questões 40 e 41. Os resultados são os seguintes:

Professora	A	B
40. Necessita de memorizar intensivamente para aprender o essencial de cada assunto na Matemática?	3,0	2,8
41. Na sua opinião conseguiu compreender o essencial dos assuntos que foram abordados nas aulas de Matemática?	3,7	3,1

Tabela 7.4: Memorização intensiva versus compreensão

Os alunos da professora A (ver Tabela 7.4) identificam que houve uma grande compreensão dos assuntos abordados na disciplina de Matemática e que o papel da memorização, não deixando de ser relevante, é de importância inferior, sendo por isso relativizada; os alunos da professora B dão importância semelhante ao papel da memorização e compreensão dos assuntos abordados nas aprendizagens realizadas.

7.1.2.5 Ligação da Matemática com a vida do dia-a-dia

Esta categoria de análise é trabalhada a partir das respostas às questões 31, 36 e 39. Os resultados são os seguintes:

Professora	A	B
39. Indique a relevância que a Matemática tem para a sua formação cultural e social	4,0	3,7
31. O professor desta disciplina usa exemplos do dia-a-dia quando aborda assuntos que está a ensinar?	3,4	3,5
36 Costuma relacionar o que estuda na Matemática com situações do seu dia-a-dia?	2,7	2,4

Tabela 7.5: Qual a relação da matemática com a vida do dia-a-dia

No que respeita à relevância da Matemática para a formação cultural e social os alunos identificam a grande importância da mesma. Já no que respeita à percepção do ensino que o professor faz e da sua relação com exemplos do dia-a-dia identificam que em cerca de metade ou mais esse factor está presente; no que se refere à relação do estudo da matemática com situações do dia-a-dia os alunos afirmam que raramente fazem isso.

7.1.2.6 Elementos de avaliação e instrumentos usados

Esta categoria de análise é trabalhada com as respostas às questões 42 e 43. Saliente-se que no que se refere à questão 43, "Os critérios de avaliação da Matemática são claramente explicitados", os alunos responderam afirmativamente quer para a professora A (100%), quer para a professora B (90%), o que nos leva a concluir que os alunos têm a percepção de que os critérios de avaliação estão claramente definidos. Quanto aos elementos que os alunos consideram importantes na avaliação final do seu trabalho à disciplina de Matemática, estes podem ser obtidos a partir de uma análise dos resultados seguintes:

	Professora	
$\bar{x}(média)$	**A**	**B**
$\bar{x} \geq 4{,}0$	Capacidades e aptidões (4,1) Relatórios de grupo (4,1) Testes (4,0) Atitudes e valores (4,0)	Capacidades e aptidões (4,3) Testes (4,0)
$3{,}7 \leq \bar{x} \leq 3{,}9$	Relatórios individuais (3,9) Trabalhos de grupo (3,9)	
$3{,}4 \leq \bar{x} \leq 3{,}6$	Trabalhos individuais (3,5) Projectos (3,5)	Atitudes e valores (3,6)

Tabela 7.6: Elementos de avaliação e instrumentos usados

A partir dos resultados podemos afirmar que os testes são um dos elementos de avaliação mas não os únicos. De facto, e de acordo com as percepções dos alunos, há um conjunto de elementos de avaliação diversificados com importância na avaliação final dos alunos. Os alunos da professora B identificam, apenas, as dimensões de avaliação (capacidades e aptidões, e atitudes e valores) como contribuintes para uma avaliação do seu trabalho. Os alunos da professora A, para além dos testes e das dimensões de avaliação (capacidades e aptidões, e atitudes e valores), identificam outros instrumentos, a saber: relatórios de grupo, relatórios individuais, trabalhos de grupo, trabalhos individuais e projectos. Isto significa que a avaliação promovida pela professora A compreende as vertentes individual e social a partir de uma ampla diversidade de instrumentos de avaliação, o que é coerente com os resultados relativos às tarefas de aprendizagem já apresentados na Tabela 7.3. O trabalho de mediação da professora B, relativamente à avaliação, recorre grandemente aos testes e à análise das dimensões de avaliação (capacidades e aptidões, e atitudes e valores). Segundo os dados recolhidos no questionário, os alunos só são avaliados na sua componente individual. O trabalho de mediação da professora A no que respeita à avaliação pauta-se por um investimento e valorização de diferentes competências (comunicação, tipos de trabalho diferentes na natureza e no formato, etc.) do sujeito epistémico do aluno durante a sua aprendizagem matemática num equilíbrio entre o individual e o social.

7.1.2.7 Estudo, estratégia e actividades usadas

Esta categoria de análise é trabalhada com as respostas às questões 34, 35, 36 e 38. Da análise das questões 34 ("Costuma estudar Matemática sozinho") e 35 ("Se estuda acompanhado, assinale todas as modalidades que utiliza") podemos concluir que os alunos dizem estudar quase sempre sozinhos: os alunos da professora A com média 3,9 e os da professora B com média 4,3. Os números mais significativos nestes dados correspondem às explicações fora da escola e à ajuda de familiares (pais e irmãos): 30% para a professora A e 20% para a professora B.

Relativamente aos resultados quanto à estratégia e actividades usadas no estudo da Matemática podemos constatar que os alunos das duas professoras usam estratégias / actividades de estudo muito semelhantes.

	Professora	
$\bar{x}(média)$	**A**	**B**
$\bar{x} \geq 4{,}0$	Res. de exercícios e problemas (4,3)	
$3{,}7 \leq \bar{x} \leq 3{,}9$	Apontamentos das aulas (3,7)	Res. de exercícios e problemas (3,7)
$3{,}4 \leq \bar{x} \leq 3{,}6$	Leitura do manual (3,6)	Leitura do manual (3,6) Apontamentos das aulas (3,5)

Tabela 7.7: Estudo, estratégia e actividades usadas na disciplina de Matemática

Por fim, e relativamente à análise dos dados da questão 37 "Costuma formular questões e colocá-las ao professor?", os alunos da professora A apresentam uma média de 3,0 significando que formulam questões e as colocam ao respectivo professor em cerca de metade das aulas; os alunos da professora B apresentam uma média de 2,5. O facto de os alunos não recorrerem ao professor, através de questões previamente formuladas, com mais regularidade pode ter a ver com a autonomia e iniciativa dos alunos.

7.1.3 A mediação caracterizada pelas dimensões de análise do QEAME

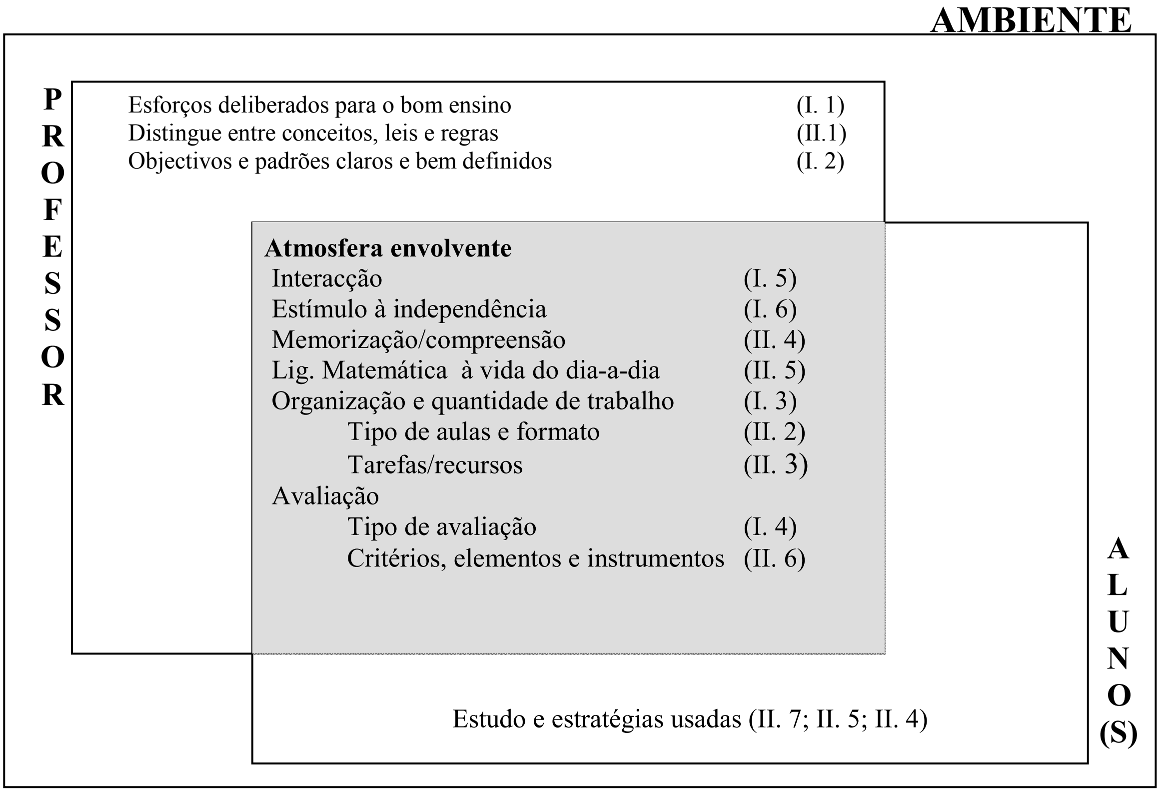


Figura 7.1. A mediação didáctica/dimensões de análise

A Figura 7.1 apresenta um esquema onde a mediação pode ser caracterizada pelas dimensões de análise do questionário, e como estas se situam de forma a dar uma resposta articulada e global aos objectivos e problema de investigação. Dos resultados podemos afirmar que a professora A tem uma mediação didáctica que recorre a tarefas diversificadas quanto aos recursos, quanto à forma de trabalho (individual/social) e quanto à natureza das próprias tarefas (resolução de problemas, trabalho de grupo, trabalho individual, projecto, relatórios (individual e de grupo)); a avaliação aparece em consonância com a dinâmica de aprendizagem no que respeita à forma de avaliação e quanto à natureza das tarefas sem excluir os testes e considerando as dimensões (capacidades e aptidões e atitudes e valores). Já no que respeita à professora B podemos afirmar que tem uma mediação didáctica caracterizada pela predominância do trabalho individual e centrada na resolução de problemas em que a avaliação, também consequente, se centra nos testes considerando, também as dimensões da avaliação (capacidades e aptidões e atitudes e valores).

É curioso constatar que se a análise do trabalho de sala de aula se restringisse aos aspectos mais globais que foram recolhidos (a parte I do questionário, e II.4, II.5 e II.7 da parte II) parecia não haver especificidades na mediação realizada por cada uma das professoras: nos aspectos gerais as professoras pautam-se por princípios análogos, segundo as percepções dos alunos. As diferenças substanciais detectam-se, sem margem para dúvidas, no trabalho central da sala de aula, incluindo a avaliação das aprendizagens realizadas.

Quanto à mediação didáctica, objecto central do nosso estudo, poderemos afirmar o seguinte. O facto do currículo ser centrado em tarefas diversificadas quanto à forma, quanto ao tipo e quanto aos recursos mobilizados, de forma que os alunos identifiquem a importância dos mesmos na sua aprendizagem, pressupõe uma mediação diferente daquela que se constitui quando centrada no trabalho individual e com pouca variedade de actividades e recursos. Assim, a mediação didáctica realizada pela professora A subentende uma estruturação específica, com uma lógica de interacção didáctica adequada, para que haja um equilíbrio entre as esferas do individual e do social. Fomenta e estimula a independência dos alunos no que respeita à sua aprendizagem. Este trabalho só pode ser desenvolvido através de uma monitorização sistemática, dando *feedback* aos alunos dos seus progressos e dos objectivos que têm de alcançar (melhorando alguns aspectos, ultrapassando dificuldades identificadas pelo professor, estimulando o desenvolvimento conceptual, etc.).

A partir desta constatação, e olhando para os aspectos da atmosfera envolvente, percebemos que apesar dos alunos da professora A e da professora B identificarem que há uma forte interacção na sala de aula e terem sido avaliadas por médias não inferiores a 3,7, a interacção promovida pela professora A tem um significado diferente da interacção promovida pela professora B e, consequentemente, promove comportamentos de aprendizagem, avaliação e autonomia diferentes. Aqui não estamos a valorar as diferentes interacções. Estamos apenas a afirmar que são diferentes. E são de tal maneira diferentes que os alunos identificam aspectos fundamentais concretos distintos nas dinâmicas de sala de aula respectivas. Naturalmente que a interacção se promove mais quando há uma grande diversidade de modos de trabalho; esta diversidade levará, naturalmente, a que os alunos mobilizem, escolham, usem e articulem um leque maior de informações aliados a conhecimentos (intelectuais, práticos e verbais) para enfrentarem as situações, problemas ou questões com que se deparam. Assim, a mediação didáctica realizada pelas duas professoras do estudo diferencia-se, segundo as percepções dos alunos, pela(o)

- estruturação do currículo e das tarefas;
- interacção entre alunos; entre estes e a professora e num equilíbrio entre as esferas do individual e do social;
- estímulo à autonomia dos alunos na sua aprendizagem;
- monitorização sistemática e diversificado do ensino e da aprendizagem (através de uma avaliação permanente e através de tarefas de aprendizagem /avaliação);
- coerência entre as tarefas de aprendizagem e de avaliação;
- actividade metacognitiva proporcionada e aprofundamento das aprendizagens;
- consideração dos saberes dos alunos.

7.2 Avaliação de competências

Iniciaremos por fazer uma análise dos dados comparando em termos globais as médias de valores dos itens categorizados por constelações (reprodução, conexão e reflexão) nos testes de competências (consultar pp.101-104). De seguida compararemos as cinco turmas da Escola A das quais se recolheram dados: em termos absolutos e em termos de ganhos normalizados. Por fim deter-nos-emos com mais profundidade na constelação reflexão e no que diz respeito, particularmente, ao raciocínio dedutivo.

7.2.1 Constelações de competências

Observando as cinco turmas estudadas (ver Gráfico 7.1) verifica-se que na constelação de reprodução entre o Diagnóstico e o Teste há uma melhoria em todas as turmas não se destacando nenhuma em particular.

Quando nos detemos na constelação de conexão só há melhorias nas turmas A, B e E, turmas da professora A (ver Gráfico 7.1). Na globalidade dos dois testes as médias de realização são superiores aos valores nas outras duas constelações parecendo poder afirmar-se que as competências da constelação conexão são as que estão mais desenvolvidas nas cinco turmas estudadas.

Na constelação de reflexão (ver Gráfico 7.1) só se verifica melhoria nas turmas A e B da professora A, professora investigadora; na turma E da professora A há um ligeiro decréscimo. Nas restantes turmas e nas constelações de conexão e de reflexão há um decréscimo entre a aplicação do Diagnóstico e do Teste. Esta constelação de competências (reflexão) é a que atinge valores mais baixos. Pode-se constatar que nas turmas em que houve subida na constelação de reflexão, 9º A e 9º B, também houve incremento na constelação de conexão; que a turma do 9ºE apesar de estar caracterizada por ter havido evolução na constelação de conexão baixou ligeiramente na constelação de reflexão. As outras duas turmas, 9ºD e 9º F, tiveram descida na constelação de reflexão mas também tiveram descida na constelação de conexão.

Assim podemos afirmar que o desenvolvimento de competências tem comportamento diferenciado nas constelações de conexão e de reflexão entre as turmas da professora investigadora e as dos outros professores da Escola A.

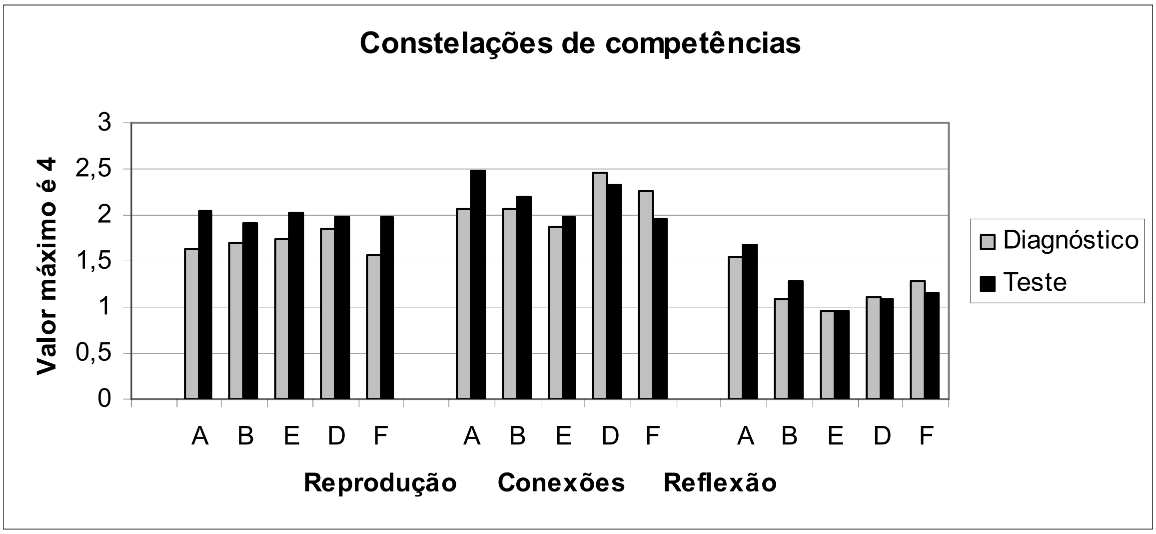


Gráfico 7.1: Resultados por constelação de competências

As turmas da professora investigadora apresentam uma melhoria em todas as constelações de competências entre o Diagnóstico e o Teste à excepção na constelação de reflexão na turma E. As turmas D e F dos professores D e F, respectivamente, apresentam melhorias apenas na constelação de reprodução como se pode observar no Gráfico 7.1.

Os ganhos normalizados (Hake, 1998; George & Cowan, 1999: 69) em percentagem são determinados através da expressão matemática g=100*(Teste-Diagnóstico)/(4-Diagnóstico) onde 4 é a pontuação máxima das questões. Se analisarmos os ganhos normalizados podemos verificar com mais clareza o que anteriormente já foi referido através do Gráfico 7.1.

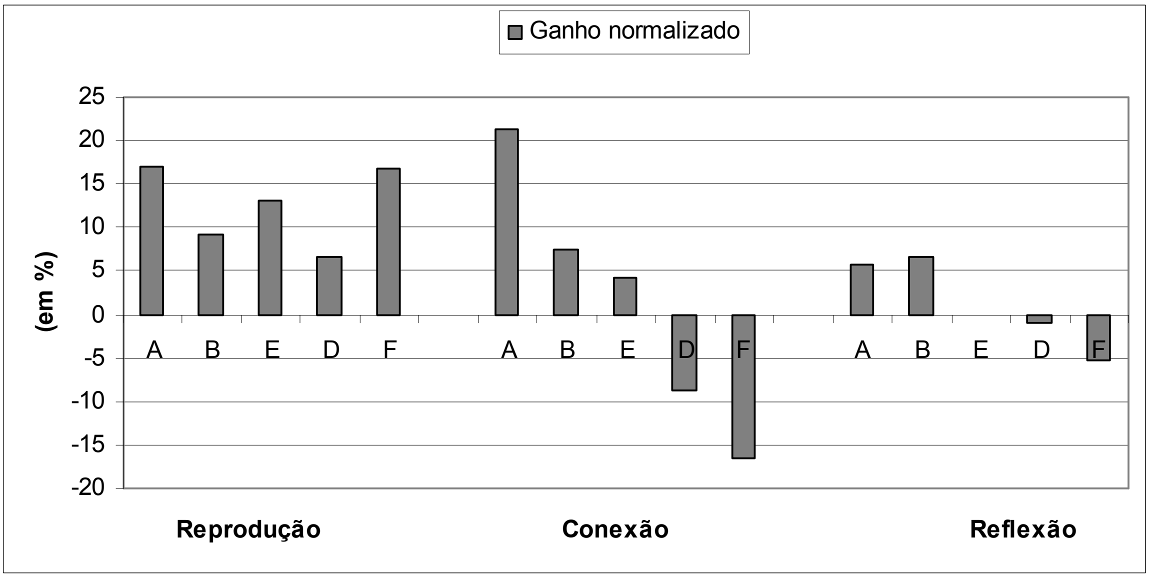


Gráfico 7.2: Ganhos normalizados por constelação

Podemos afirmar que a abordagem curricular realizada pela professora investigadora, para além de desenvolver competências de nível mais baixo na constelação de reprodução, como é normal desenvolverem-se em todas as salas de aula, promove em simultâneo o desenvolvimento de competências de nível mais alto (constelações de competências de conexão e de reflexão). As turmas têm pontos de partida diferenciados. O Gráfico 7.2 (ganhos normalizados) permite observar que a turma A é a que tem ganhos mais elevados em todas as constelações de competências, seguida do 9º B e da turma do 9º E, todas turmas da professora A. Nas turmas 9º D e 9º F há apenas ganhos na constelação de reprodução.

7.2.2 O raciocínio dedutivo na constelação reflexão

Passaremos a analisar dentro da constelação de reflexão o raciocínio dedutivo trabalhado numa única questão, 8.2, que se manteve inalterada entre o Diagnóstico e o Teste. Convém realçar que o raciocínio dedutivo apenas foi trabalhado, de forma explícita, no final do 3º Período e no final do 9º ano. Há dois indicadores interessantes que contribuem para percebermos a reacção/comportamento dos alunos relativamente ao raciocínio dedutivo: ausência de resposta ao item e os resultados médios em termos de resposta.

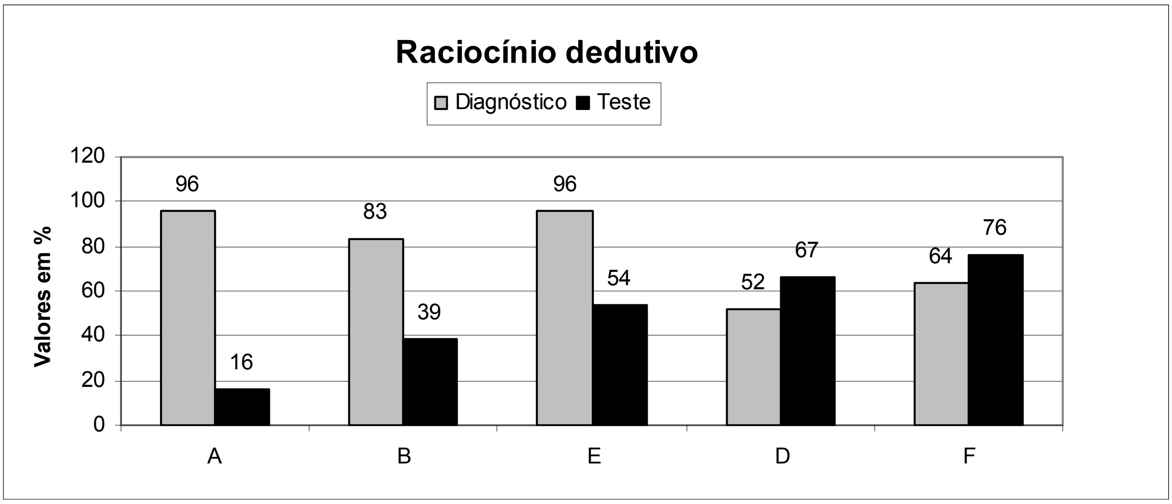


Gráfico 7.3: Ausência de resposta à questão 8.2

Quanto ao primeiro indicador referido, ausência de resposta ao item, podemos observar nas turmas da professora A (turmas A, B e E) um decréscimo substancial nas não respostas: na turma 9º A há a diminuição de 80%; na turma 9ºB de cerca de 50% e na turma de 9º E a diminuição de cerca de 40% de não respostas; por outro lado nas turmas do 9º D e 9º F dos professores (D e F) aumenta ligeiramente em cerca de 12%.

O outro indicador tem a ver com a melhoria nos resultados relativos ao raciocínio dedutivo (ver Gráfico 7.4): as turmas A e B melhoram significativamente enquanto que as turmas E e D apenas apresentam uma ligeira melhoria. No caso da turma F não há qualquer alteração entre as implementações do Diagnóstico e do Teste.

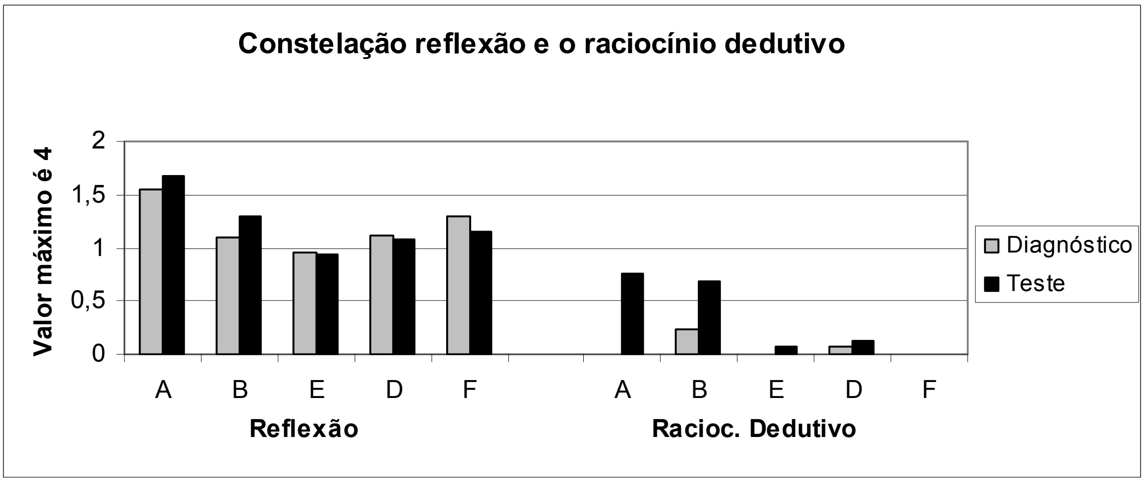


Gráfico 7.4: Resultados à questão 8.2 em comparação com a constelação da reflexão

Assim, destes dois últimos gráficos pode afirmar-se que nas turmas da professora investigadora (A, B e E) diminuem as não respostas (código 9) e aumentam as argumentações lógicas; na turma D do professor D aumentam as não respostas (código 9) e há uma melhoria na argumentação lógica; na turma F da professora F aumentam as não respostas (código 9) mas a média de valores na questão 8.2 mantém-se nula. Analisando os sumários das turmas em causa verifica-se que em todas as turmas, à excepção da turma do 9ºF, o conteúdo relativo à "Geometria como construção hipotético-dedutivo" foi leccionado apenas numa aula: na turma D, na penúltima aula do ano, um bloco de 90 minutos; nas outras turmas (A, B e E) também lhe foi destinada apenas uma aula, a antepenúltima do ano; os alunos apenas tomam contacto com o que é uma demonstração nas últimas aulas no final do 3º Ciclo e no final do 9º Ano. Ora a dedução é um processo bastante complexo, que requer bastante tempo, reflexão e um raciocínio abstracto de nível elevado. O facto de apenas ser abordado numa única aula terá, como seria de esperar, poucas implicações práticas em termos de aprendizagem.

Os ganhos normalizados nas turmas A e B da professora investigadora são significativos no raciocínio dedutivo relativamente à constelação reflexão (ver Gráfico 7.4): apesar das turmas A, B, D e E terem sido objecto do mesmo tempo de trabalho no sub tema "Geometria como construção hipotético-dedutiva", um bloco, contemporâneo e imediatamente antes da implementação do Teste as turmas reagiram de forma diferenciada.

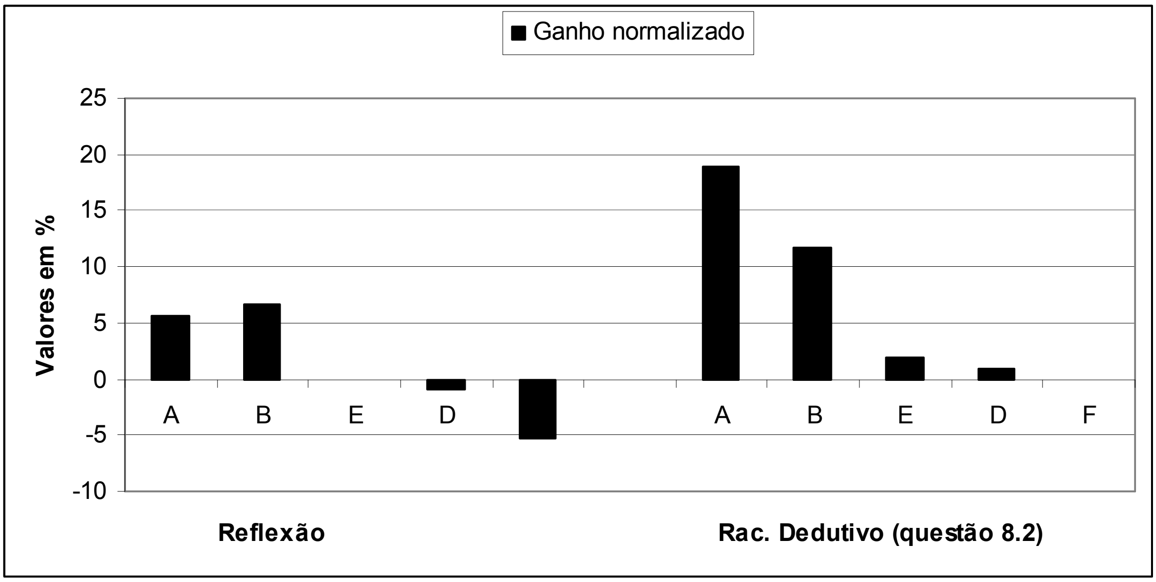


Gráfico 7.5: Raciocínio dedutivo: ganhos normalizados

Na constelação de competências de reflexão são considerados múltiplos métodos complexos, os processos de generalização, de reflexão e *insight*, a colocação e resolução de problemas complexos para além do raciocínio dedutivo. De acordo com o Gráfico 7.5 podemos constatar que nas turmas A e B houve melhorias na constelação de reflexão e que essas melhorias de forma global proporcionaram uma aprendizagem mais significativa no que respeita ao ensino explícito que se realizou num bloco de 90 minutos do raciocínio dedutivo. De facto, a evolução na constelação de reflexão não pode ser atribuída linearmente apenas ao trabalho de um mês de aulas e ao ensino explícito realizado num bloco mas à abordagem curricular a que os alunos vinham sendo expostos, às suas características e princípios de actuação. De qualquer modo os valores detectados para a constelação reflexão são relativamente baixos (são os mais baixos de todas as constelações, como seria de prever) e a questão comum ao Diagnóstico e Teste, questão 8.2, onde se solicitava que os alunos identificassem a hipótese e tese e em seguida demonstrassem a proposição em causa, permite apenas indicar a dificuldade de trabalho explícito e específico podendo problematizar e apresentar as questões seguintes:

Teríamos resultados diferentes se o subtema “Geometria como construção hipotético-dedutivo” tivesse sido trabalhado durante mais tempo e mais cedo no 9º ano? Terão os alunos do 9º ano maturidade intelectual adequada para abordar processos abstractos de nível cognitivo elevado como a demonstração? Em termos curriculares faria sentido abordar o subtema “Geometria como construção hipotético-dedutivo” mais cedo no 3º Ciclo de Ensino Básico (7º ou 8º anos)?

7.3 Listagem Dinâmica de Perguntas

Na Listagem Dinâmica de Perguntas (consultar pp. 104-105), os alunos da professora investigadora (9º A, 9º B e 9º E) referiram os aspectos que mais ou menos gostaram relativamente à trigonometria do triângulo rectângulo. Relembre-se que havia 28 alunos na turma A, 19 na turma B e 27 na turma E. Os dados organizados são apresentados em percentagem para se poder ter uma noção relativa dos resultados na turma e na população total de alunos da professora investigadora.

Turma	9ºA	9ºB	9ºE	Total
O que gostei mais	(%)	(%)	(%)	(%)
Fazer o astrolábio para medir objectos	93	32	42	58
Das razões trigonométricas: $sen\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$	22	32	35	29
Trabalho de grupo	11	16	27	18
Não sei/não respondeu	30	21	19	24

Tabela 7.8: Listagem Dinâmica de Perguntas: do que mais gostei

Turma	9ºA	9ºB	9ºE	Total
O que gostei menos	(%)	(%)	(%)	(%)
Das razões trigonométricas: $sen\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$	22	26	35	28
Trabalho de grupo	11	5	12	10
Outras	7	21	19	15
Não sei/não respondeu	48	37	31	39

Tabela 7.9: Listagem Dinâmica de Perguntas: do que menos gostei

No que respeita à Listagem Dinâmica de Perguntas apresentam-se excertos de conferências (9º B e 9º A) relativas às aulas onde se distribuíram as “fichas” da Listagem

Dinâmica de Perguntas onde os alunos deveriam registar as suas preferências e as suas perguntas e onde explicitam as suas dificuldades.

Conferência 6, relativa à Listagem Dinâmica de Perguntas no 9º B, dia 3 de Maio de 2005		
I 1	Era a quarta aula na 3ª feira, no dia 3 de Maio e, e... tínhamos pensado as duas, no sábado anterior, pôr aquilo [Listagem Dinâmica de Perguntas], como se chama, no fim da aula, a 15 minutos do fim, lembras-te?	Explicitação dos objectivos da Listagem Dinâmica de Perguntas
C 2	Exactamente...	
I 3	Mas depois quando eu me lembrei do que é que ia fazer na aula disse: se eu soubesse o que eles não sabiam, eu podia ir directamente ao que eles não sabiam...se eles iam responder o que é que não sabiam...	
C 4	Já tinhas dado a matéria toda, em termos de teórica? Ias para a parte prática, é isto, não é?	
I 5	Exactamente. E, portanto, então, decidi dar-lhes logo no início da aula. Expliquei-lhes que aquilo era um questionário para eles fazerem e... e portanto eles estiveram a fazer isso... Eu pus um bocadinho ligeiramente diferente daquilo que tu me enviaste, aqui na parte do cabeçalho, (*Ah, pois...)* Pus o número, a turma e o nome que me interessa, que interessa-nos saber quem é o aluno, (*claro, claro...)* e pus a data, que nós não tínhamos posto aí (*Hm...Hm...)* Quando eles começaram a ... Pois falta aqui uma pergunta, de facto...	
C 6	Pois falta...	
I 7	Bem me perguntaram que dificuldades é que tinham... Não sei por que é que falta... Não sei porque é que ...	
C 8	Se calhar ficou na fotocópia	
I 9	Pois foi, pois foi. Portanto quando eles me perguntaram, eles tiveram muita dificuldade em saber o que é que tinham aprendido e confundiram com o que se tinha	Confusão dos alunos entre o que a professora ensinou e o que eles aprenderam

<table>
<tr><td></td><td>dado na aula...
Por isso quando eles diziam o que tinham aprendido, diziam na parte que faltava aprender que não faltava aprender nada...
E eu disse: Mas tu já sabes tudo?
E eles diziam: Não, não sei, eu não percebo nada disto!
Então, como é que já disseste que aprendeste?
Eu não estou a perguntar o que é que eu dei na aula (dito de forma demorada e sublinhada), estou a perguntar, daquilo que eu dei(Hm...Hm...), o que tu já sabes
Ah, professora, então..., então...,
Bom, não conseguiram resolver isso porque eles ficaram sempre sem saber o que haviam de responder à 2; o que é que lhes faltava aprender porque eles acharam que eu já tinha dado a matéria toda(Hm...Hm...).
Andaram ali para trás e para a frente e já tinha dado os conteúdos todos a dar, que faziam parte dos títulos já estava tudo dado
(Exactamente)
[…]
E como eu percebi que eles não conseguiram responderam àquilo que a gente imaginava que eles respondessem (Hm...Hm...) com a pergunta 1 e a pergunta 2. (Hm...Hm...), então disse-lhes,
Então, agora, por detrás, vão acrescentar uma pergunta e vão pôr lá por trás (mexendo nos papéis do questionário e procurando a pergunta) é:
“Quais são as perguntas a que tenho de saber responder neste tema?”
(silêncio)
Aqui, foi maior a dificuldade, ainda, porque eles não sabiam fazer perguntas acerca do tema (Claro...)...
Depois esclareci-lhes que se eles não soubessem fazer perguntas, significava que eles não sabiam nada da matéria...</td><td>Apesar da explicação da professora eles não conseguiram compreender

Pergunta alternativa para tentar ultrapassar as dificuldades associadas ao conceito de aprender.

Os alunos também apresentavam dificuldades em fazer perguntas

Os alunos só consideram ser fundamental saber responder a perguntas…</td></tr>
<tr><td>C
10</td><td>E nestas coisas tens alunos que te fazem 10 (bem as perguntas e outros que não, não é?</td><td rowspan="2">Identificação das dificuldades a partir dos exercícios propostos no manual adoptado</td></tr>
<tr><td>I</td><td>Tiveram todos muitas dificuldades em fazê-las...
E houve alunos que me disseram</td></tr>
</table>

11	Eu não sei fazer perguntas! Perguntei-lhes: Então, como é que tu estudas para os testes? Eu não faço perguntas. Eu respondo a perguntas. Pausa (sorriso) Bem diferente! E perguntei-lhe: Então como é que sabes as perguntas que vais responder para ver se já sabes? (*se já sabes responder bem...)* E ele disse: A minha mãe faz-me as perguntas! E, portanto, eu tenho que aprender a respondê-las. Nunca tenho a preocupação de fazer perguntas... (*Hm...Hm...)* Isto foi o André. E eu disse: Mas imagina que tinhas que saber destinar isso… Então ele lá esteve a esforçar-se, a fazer as perguntas... Ah,... Mas, mesmo assim, as perguntas que ele me fazia era na forma de afirmação. Nunca na forma de interrogação... Mas de qualquer maneira façam as perguntas todas que souberem... alguns, nas dificuldades que tinham, perguntaram-me se podiam pôr o número dos exercícios onde tinham dificuldades e que não sabiam resolver... E eu disse: Podem... as dificuldades podem indicar... Mas na parte de trás houve alunos também que foram aos exercícios e passaram as perguntas que estavam nos exercícios (*Hm...Hm...)*	Explicitação da professora acerca da reorganização da dinâmica e do trabalho a realizar na aula a partir do que os alunos disseram acerca dos exercícios que não sabiam resolver Recolha, apenas, da Listagem Dinâmica de Perguntas
I 12	A partir daí eu orientei a minha aula não para fazer o aquilo que nós tínhamos pensado mas para... ir buscar os exercícios onde eles tinham dificuldades...que eles já tinham determinado. Que era o 5., ...	
C 13	Conseguiste, assim, rapidamente ir buscar os...?	
I	...Porque eles iam-me dizendo...Alguns alunos já me tinham dito que não conseguiam resolver este, resolver aquele,... Mas como nós já tínhamos	

14	decidido as aulas... (*Ficaste?...)* Fiquei...Portanto o que eu fiz, foi... ir ao 5. que era, que o 5 tem a ver com ... O 5 'tá aqui (depois de ter folheado o livro de texto) que é saber escolher qual é a razão (*isto é difícil, não é? para eles é difícil, não é? Mete equações...*) É Depois fui ao 6. e ao 7. por causa de eles aprenderem a ler as tabelas(*Hm...Hm...)* ... de uma forma sistemática e portanto disse-lhes como é que se liam as tabelas(*Hm...Hm...)* ... e depois passei para o 10, para o 11... para o 10, para o 11 e para o 12. E portanto, aí estão a utilização das relações entre as razões trigonométricas. E nessa aula... terminei. Pronto. Terminei de fazer as revisões. Nesta aula a única coisa que recolhi foi a Listagem Dinâmica de Perguntas(*Hm...Hm...)*...e, nesta turma ainda não lhes entreguei nenhum dos trabalhos realizados... […]	
C 15	4ª aula de trigonometria, é não é?	
I 16	É! Portanto, não entrei em nada do que tínhamos previsto que íamos entrar, que era	
C 17	Que era fazer estas duas páginas:	
I 18	Sim estas duas páginas 86 e 87. Não entrei!... Ah! E dei-lhes..., e dei-lhes, também, o quadro de valores exactos(*Hm...Hm...)*... Aqui dei-lhes o quadro de valores exactos (*Hm...Hm...)*... Uma coisa era os valores das tabelas e outra coisa era dos valores exactos... Aqui também lhes dei...e dei-lhes a mnemónica para aprenderem... Utilizei a disposição que está aqui no livro e não aquela que é costume usar. Não sei... é igual... (*ok!*)...	Apresentação do tabela de valores naturais e do quadro dos valores exactos dos ângulos de amplitude 30º, 45º e 60º.

Conferência 7, relativa à Listagem Dinâmica de Perguntas no 9º B, dia 5 de Maio de 2005		
I 19	E há aqui um que tem umas dificuldades. E achei piada... Que é tem dificuldades porque não sabe o que os símbolos significam...Mas os símbolos para este aluno é o alfa, o beta, o gama...	
C 20	Hmm!...	
I 21	E depois percebi que o miúdo nem sequer conseguia continuar a perceber...porque nem sequer isso ... porque emperrava ali	
C 22	Porque era ali..., exactamente..., aquilo era um bloqueio(*É!*)... que não o deixava ir ao resto(*É!*)...	
I 23	Em termos...	
C 24	Ele achava que aquilo tinha um significado se calhar muito...(*Que ele não sabia...)* muito... (*Que ele não sabia...)*	Uma das dificuldades transversal a toda a Matemática como ciência é a utilização de símbolos e os respectivos significados.
I *25*	E portanto...	
C 26	É a álgebra...Lá voltamos nós...	
I 27	Não! É...É a utilização de símbolos... Para mim eu nunca imaginaria que um aluno tivesse dificuldades na trigonometria... era nas letras gregas...(*Exactamente!)* Nos símbolos das letras gregas...	
C 28	Desconhece e portanto acha que aquilo tem um significado	
I 29	Por outro lado, é difícil de fazer porque nunca fez, e depois não lhes sabe dizer o nome porque nunca usou... Pronto isso foi uma das coisas que me apercebi só por causa deste tipo de questionário (*Hm...Hm...)* […] Portanto, na aula seguinte o que fiz foi, portanto pegar nos alfas, nos betas, e não sei quê... aqui nesta aula,... Portanto comecei por ir directamente às dificuldades... Ah!... Mas antes disso, espera..., antes disso o que eu lhes pedi, foi outra	

	vez, no início da aula, distribui-lhes a Listagem Dinâmica de Perguntas que já tinha tirado as coisas, distribui-lhes outra vez e disse-lhes “Agora vão outra vez, ... pegar nesta folha, marcar... vão virá-la para trás... e vão tornar a escrever, a cor diferente..., Agora riscam as perguntas que fizeram da últimas vez e que já sabem responder e vão fazer todas as outras perguntas que vocês acham que são importantes(*Hm...Hm...)*...” Se souberem responder põem um R atrás, se não souberem deixam-na entretanto pendurada(*Hm...)*... E então, eles,... uma miuda disse-me logo: Óh professora, eu já fiz... Já tenho aqui as perguntas todas feitas... que eu, agora, não é como na última aula, que eu na última aula eu não sabia fazer... Como ela não sabia fazer, ela tratou de saber fazer perguntas... Então, já tenho aqui 6!...	A professora identifica a grande dificuldade dos alunos em formular perguntas. Ajuste da dinâmica da sala de aula às dúvidas e dificuldades explicitadas pelos alunos.
C 30	As perguntas que não sabem não punham nada... As que sabem punham R... (*R.*) É isso, não é? (*É.*)	
I 31	E riscavam as que já sabiam responder,... das que tinham escrito no outro dia... e... e portanto fizeram todas as outras...aqui, maior parte deles creio que já sabia responder, outros acharam que isto era uma seca... estar a fazer perguntas Lá vem outra vez, têm muitas dificuldades, do meu ponto de vista, têm muitas dificuldades a... fazer as perguntas (*Hm...Hm...)*... Mas fizeram dum modo geral... Esta turma reagiu bem. Demoraram, novamente, meio bloco (*Hm...Hm...)*...a fazer Demoraram meio bloco, e... E então fui depois trabalhar o que é que eles ainda não sabiam. O que é que eu fiz? Fiz essa da, para começar, pelo menos, pelas letras escrevi-as no quadro e disse que era o alfabeto grego (*Hm...Hm...)*...e por baixo das letras escrevi o nome delas...	Identificação do que faltava ensinar e proporcionar como experiência matemática.

	e esse aluno que me tinha dito que era essa a dificuldade dele passou tudo para o caderno... (*Hm...Hm...)*. Portanto, acabou por lhes dar, penso eu, acabou por lhes dar algum sentido. E falei isso para ele e para todos os outros... (*Exactamente!*) Depois disso, o que é que eu fiz? Fui fazer dois problemas: um que eles me puseram e outro que tinha falado aqui contigo. Um que eles me puseram que é o correspondente ao exercício 4, ...exercício 4 da pág. 82, que é construir um triângulo cujo coseno é 4/7. (*Hm...Hm...)*... Construir um triângulo...	
C 32	Mas entretanto eles também já tinham... todos os exercícios já os podiam fazer...e eles nalgum trabalho de casa entretanto e não só	
I 33	Sim, eu mandei-lhes um trabalho de casa, fazer aquilo da página 86, estudarem, mas depois não vim aqui ver isto! Não fui ver o que é que eles me disseram lá e fui ver o que é que me faltava ainda trabalhar com eles...Porque eu listei aqui no papel o que é que me faltava..	
C 34	Olha, quantos alunos tem esta turma? (*Tem 19*)	
I 35	Esta turma tem 19. Eu listei aqui o que é me faltava ainda trabalhar com eles...Listei, depois de ter visto tudo, listei... Listei que me faltava trabalhar isso porque dois alunos me pediram, não tinha dado por ela... E depois... o que faltava trabalhar pus aqui uma listagem e depois, então na aula, fui fazer uma fazer a construção e pus aquela construção que tu me tinhas dito aqui da tal: como é que podia calcular o sen35º, eu pus 35º (*Ok!... só com régua e esquadro*) que não tinha calculadora, nem tinha tabelas naturais, como é que eu podia fazer com régua e transferidor, calcular, calcular... o sen35º(*Hm, ...Hm...*)...E estivemos lá a construir isso e eles construíram à vontade... Depois de marcar o ângulo de 35º, fecharam o triângulo rectângulo onde quiseram e depois mediram e calcularam(*Hm, ...Hm...*).... Os valores a que chegamos, praticamente todos, porque cada um construiu o seu, no seu caderno, eram todos muito	

	próximos dos valores dados pelas tabelas. Fizemos esse, e depois... viemos fazer, qual é que viemos fazer? Acho que foi aqui as tabelas dos valores naturais. Foi aqui este Nesta aula é que foi isto e que é que fizemos mais? (*Hm, ...Hm...*).... Começamos a fazer o exercício 1 da página 87 e já não acabamos, que ele é bastante extenso	
C 36	'Tá bem... Eu ...esses dois exercícios fui fazendo...Numas turmas, noutras não...Ok!	
I 37	Queres fazer aí alguma pergunta?	
C 38	Não ! Penso que não! Penso que aqui, não! (*Do 9º B?*) Penso que aqui está claro a forma como é que trabalhaste... a listagem de perguntas...Achas que vale a pena, 45+45 minutos?	
I 39	Não sei se vale a pena, eu só sei que eles não conseguiram fazer em menos...(*Pois!...*) O que está aqui em causa é eles ...	
C 40	Estamos sempre apertadas com o tempo, não é?	
I 41	Sempre, sempre! O que está aqui em causa..., que se nós lhe déssemos...eu imaginei que, se lhe déssemos um quarto de hora antes do fim da aula, que aquilo ia ser uma bagunça, que eles não iam fazer (*Não! Pois não*!) Pronto e por isso..., por outro lado também podia ajustar...Aquilo que eles fizessem podia ajustar o resto do trabalho e sempre lhes explicitei isso...Que tinha duas funções, aquela lista de perguntas: primeira era que eles tomassem consciência do que é que já tinham aprendido e do que é que lhes faltava aprender; e a segunda eu ter acesso ao que eles tinham consciência, para poder ajustar o trabalho que eu fizesse na aula. (*Exactamente*!) E portanto, era útil para eles, porque os obrigava a pensar acerca do trabalho que tínhamos feito; era útil para mim porque eu podia ajustar o trabalho da aula... às necessidades deles, directamente! (*Exacto*!) Portanto, disse-lhes que era fundamental! As duas coisas...	Reflexão com a *critical friend* acerca dos objectivos e das vantagens da aplicação e implementação da Listagem Dinâmica de Perguntas.

C 42	Agora também vamos ver se eles, daqui para a frente conseguem formular melhor as perguntas, não é?	
I 43	Ou terem mais consciência... O problema não é (*Pois!*)a formulação.(*Pois!*)..A formulação (*Sim!*) corresponde a um grau de consciência acerca do do ... Eu continuei a dizer-lhes: Vocês, quanto mais perguntas souberem fazer, significa que percebem melhor! Nós não fazemos perguntas daquilo que não conhecemos... (*Exacto*!) E, portanto, era nessa perspectiva... (*Exacto!*) Pronto. Fechamos esta turma? *(Hm, ...Hm...*)	

Conferência relativa à Listagem Dinâmica de Perguntas no 9º A

<table>
<tr><td colspan="3">Conferência 8, relativa à Listagem Dinâmica de Perguntas no 9º A, dia 2 e 5 de Maio de 2005</td></tr>
<tr><td>I
44</td><td>Aqui levei as folhas. Aqui levei as folhas...Porque a aluna [Mafalda] que na aula anterior me dizia que não tinha responsabilidade nenhuma, ela não tinha a culpa daquelas medições, que foi a mesma, dizia-me:
Oh, professora! Isto tem algum jeito de perguntas? Eu não sei responder a nada!
Como não sabes responder?
A professora pergunta:</td><td rowspan="3">A Mafalda tem muita dificuldade em falar sobre aspectos pessoais…

Confusão dos alunos entre o que a professora leccionou e os alunos aprenderam. Recurso ao manual adoptado para identificarem alguns tópicos</td></tr>
<tr><td>C
45</td><td>Reagiram mal, foi? À listagem?</td></tr>
<tr><td>I
46</td><td>Sim!
O que mais gostei? Sei lá do que mais gostei?!...
Oh, Mafalda: Põe aí que não sabes!... Se tu não sabes, não sabes!
Depois: do que menos gostei? Eu sei lá, do que menos gostei!
Depois a professora pergunta aqui: Qual é a ajuda que eu espero da professora? A professora é que sabe! (sorriso da critical friend)...
Eu disse: Mas tu achas que eu sei o que tu precisas que eu te ajude? Eu não sou tu, não to consigo dizer! Tu achas que alguma vez eu sei falar por ti? Isso não sei, de certeza!
Eu sei lá o que é que eu quero que a professora me ajude! Eu sei lá! Reagiu desta maneira...
Depois os outros confundiram, novamente, ...
Eu disse-lhes: Atenção não confundam o que eu aprendi com o que o professor deu – uma coisa é o que o professor dá e outra é o que vocês aprenderam! Não valeu de nada!
Quanto ao preenchimento foram ao livro: fizeram muito pior que os de 9º B...Porque os do 9º B olharam para o livro para saberem falar acerca do que tinham aprendido ou de perguntas que lá estavam... Estes passaram os títulos e perguntavam-me: chega isto professora? (Pois, para despachar!)
Chega isto professora? Mais do que os títulos...Mais do que os títulos?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>C
47</td><td>Mas estes alunos, os bons e os mais fracos? Os melhores e os mais fracos?</td><td></td></tr>
<tr><td>I

48</td><td>Quem se manifestava eram os alunos que têm algum aproveitamento médio/bom, não é? (Sim!), manifestavam-se desta maneira porque há alguma confiança e auto-estima(Hm!...Hm!...)... ... desta maneira tão convicta, não é? (Hm!...Hm!...)...Alguns deles pegaram aqui, ...como se chama?, no tema, vieram à página de entrada do tema, tem aqui 2 itens, portanto o que é que tinham aprendido? Estes dois itens! (Exactamente!)
E perguntava-lhes: o que é que te falta aprender?
Nada! Eu já aprendi tudo – essa mesma Mafalda. Eu já aprendi tudo...
Não precisas de aprender mais nada? Já sabes tudo?
Já!
Então se já sabes tudo, dizes na parte do que te falta aprender dizes que não te falta aprender nada: porque já aprendeste tudo!....
Tens mesmo a consciência de que já aprendeste tudo?
Já professora!...
Então pronto, escreve lá ...
Fui-lhes dizendo, na mesma, que era importante saber fazer perguntas... mas fazer perguntas, ainda não analisei ao pormenor... (Sim, sim, sim...)
Mas o que eles me fizeram...perguntas...eu não sei o que é que eles me fizeram. Espero que lá esteja tudo, uma coisa toda ajavardado(Hm!...Hm!...)......
Pronto! Não gostei da atitude!
Vê, quando disse, fazei perguntas!
Essa mesma Mafalda disse: Eu não sei fazer perguntas! Só sei responder! (Hm!...Hm!...)...– o mesmo que o outro já me tinha dito (Exactamente!)
Eu só sei responder! Eu agora lá sei fazer perguntas! O que eu tenho é saber responder! Não que saber fazer perguntas... Isto é muito difícil, isto é muito difícil, professora...só nos põe coisas que a gente não sabe responder .... E para o que é que isto é?
Lá lhes expliquei, novamente, que isto [Listagem Dinâmica de Perguntas] tinha a intenção de eles terem consciência do que já tinham</td><td>A Mafalda tem a convicção de que já aprendeu tudo e que não lhe falta aprender nada!

A Mafalda explicita a dificuldade de fazer perguntas.

Esclarecimento da professora acerca do objectivo do exercício de reflexão escrita: Listagem Dinâmica de Perguntas.

O diálogo com a Mafalda não permite que a professora investigadora tenha espaço para se centrar nas dificuldades dos</td></tr>
</table>

	aprendido, do que lhes faltava aprender, ...e que isso era importante para eles porque assim significava que eles dominavam a matéria, e era importante para mim porque assim saberia, como é que se diz, ... o que é que lhes faltava aprender e como haveria de organizar as minhas aulas... Houve alunos que no início das aulas, que tinham dificuldades, o Rui!, e depois... eu não tive tanta a percepção como tive com o 9º B, do que é que lhes faltava aprender ou de quais eram as dificuldades deles. Porque como aquela Mafalda, nos outros me... como é que se diz, ... polarizavam para eles(*Exactamente!*) eu acabei por não ter ...serenidade (*percepção...)* nem percepção do que se estava a passar com os outros. Pronto! (*mas isso acontece muito*!) E de forma que, como eu já tinha visto quais eram as dificuldades da B, também estava influenciada por isso...O que é que fui fazer? Novamente como fiz na turma B: o que é que comecei por fazer? Fui directamente, apesar de não ter visto quem é que tinha escrito ou não, fui directamente, à construção do triângulo, *(Hm!...Hm!...)*...[que tivesse um ângulo agudo cujo co-seno fosse 4/7, mandei-os construir...e perguntei-lhes se eles sabiam como é que ...e perguntei à Mafalda se ela sabia como é que havia de construir...	alunos Professora remete a questão à aluna, Mafalda, que estava convicta de que já tinha aprendido tudo.
C 49	Pois claro! Não havia perguntas.... (*sorri-se...)*	
I 50	E a Mafalda pôs-se a pensar, pensar, pensar.... E disse-lhe: mas sabes ou não sabes? Tens alguma ideia de como é que se faz ou não? Manteve-se em silêncio... Há alguém que tenha alguma ideia de como eu construa esse triângulo? E um aluno, o Filipe Cristóvão, começou por explicar que nós construíamos um cateto qualquer, de medida 4, que depois com um compasso, num dos vértices e com a abertura de 7, medíamos, fazíamos essa parte da circunferência e depois construíamos o outro cateto até chegar, até chegar a essa circunferência e marcávamo-lo e depois uníamos a hipotenusa.	A professora dá-lhe tempo para pensar O aluno explicou oralmente o processo. E, de seguida, a professora mandou-o ao quadro fazer a

	Então anda fazer ao quadro! Foi fazer ao quadro, construiu... Os alunos pediram-me compasso: compassos, não trouxe, hoje... Transferidores, também não eram precisos para ali... Réguas pediram-me: eu tenho... Levo sempre réguas, transferidores, velhos e … distribuí. Não tinha os compassos, não pude distribuir. E eles lá construíram... Depois a seguir, mandei-lhes construir na mesma o sen 35º... Foi a construção seguinte... Como é que se havia de fazer? Pedi a outro aluno para ir medir, como não tinha transferidor na sala, transferidor de quadro, fui buscar um transferidor pequenino, medi no quadro com o transferidor pequenino, depois prolonguei, depois perguntei-lhes onde é que devia pôr o outro cateto... perpendicular... Eles ficaram sem saber [onde posicionar o outro cateto] e eu disse: nós pomos onde quisermos...mais chegado, mais afastado, onde vocês quiserem. E depois o que é que fazemos? Vamos fazer as medições...Vamos ver quanto é que mede o cateto oposto ao 35º, vamos ver quanto é que mede a hipotenusa que nós marcamos*(Hm!...Hm!...)*...vamos lá a fazer o quociente, vamos lá toda a gente a fazer...e vamos ver quais são os valores que nos deram... Eu fiz, também, os valores que nos davam no quadro.... Alguns perguntaram-me se tinham de passar as mesmas medidas que estavam no quadro. E eu disse: não, não passas as medidas que estão no quadro! Fazes as tuas medidas, que estão aí no lugar*(Hm!...Hm!...)*...... E é com essas!... E depois perguntei-lhes: então deu-vos?... E fui buscar o valor que estava tabelado... E agora vamos lá a ver se os nossos valores se aproximam ou não dos valores do sen35º... Vimos que sim! e descobrimos...descobrimos, não! Falei e reflecti que... eram todos iguais porque estava ali, tinha sido medido 35º e portanto qualquer que fosse o triângulo, eles eram todos semelhantes, qualquer que fosse o triângulo ele tinha que dar esse valor [sen35º]...Isto para dizer e depois escrevi no quadro... Esta é a nossa medida experimental ... […]	construção e todos os alunos construíram o triângulo. A professora, de seguida, colocou o problema da determinação do valor do sem 35º tendo apenas como recursos régua, compasso e transferidor. …orientou a construção com toda a turma No quadro foram registados os valores da construção que estava no quadro e foi solicitado aos alunos que registassem as correspondentes aos seus triângulos. Realizados os cálculos para determinar a razão trigonométrica do sem 35º cada aluno pode comparar a seu valor (experimental) com os que estavam nas tabelas de valores e/ou da calculadora gráfica.

Elaborar perguntas foi bastante difícil para os alunos. Ainda mais que o conceito de aprender para os alunos estava bastante "colado" aos conteúdos leccionados na sala de aula. Apesar dos esforços da professora para explicitar as diferenças apresentou-se bastante difícil os alunos compreenderem. A turma em que os alunos tiveram sérias dificuldades, na primeira vez que contactaram com este tipo de exercício de reflexão foi o 9º A e os que tiveram menos foi o 9º E – analisar os dados constantes nas Tabela 7.10, Tabela 7.11 e Tabela 7.12; na segunda vez, os alunos do 9ºA fizeram bastantes perguntas e os alunos do 9º E fizeram relativamente poucas. Os alunos do 9º B mantiveram-se numa média de questões por aluno mais ou menos estável. No entanto as médias finais de perguntas por aluno (relativas a todas as questões formuladas entre a primeira e segunda vez em que os alunos fizeram este exercício reflexivo sobre o subtema leccionado) são bastante equiparadas nas três turmas: 4.8 no 9ºA e no 9ºE e 5.3 no 9ºB.

Nº perguntas Nº de alunos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**12**	**13**	**Total**	**Média**
05-05-2005	20	1	3	1	1							14	0,5
09-05-2005	7	0	1	4	2	5	6		1	1	1	116	8,2
9ºA												130	4,8

Tabela 7.10: Número de perguntas realizadas pelos alunos do 9º A

Nº perguntas Nº de alunos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**12**	**13**	**Total**	**Média**
03-05-2005	4	1	7	3	1	1	2					45	2,4
05-05-2005	3	3	3	3	3	1		3				56	2,9
9º B												101	5,3

Tabela 7.11: Número de perguntas realizadas pelos alunos do 9º B

Nº perguntas Nº de alunos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**12**	**13**	**Total**	**média**
09-05-2005	4	1	6	7	3	4			2			82	3,0
11-05-2005	7	8	10	2								34	1,3
9ºE												126	4,8

Tabela 7.12: Número de perguntas realizadas pelos alunos do 9º E

PARTE III - Resultados

8. Características da experiência matemática proporcionada e sua relação com a aprendizagem dos alunos

No processo educacional, não menos importante que as práticas de ensino diversificadas e mobilizadoras de aprendizagens enriquecedoras e significativas, é central o sujeito aprendente, o sujeito epistémico: tudo pode estar cuidadosamente planificado e implementado mas se o aluno não estiver envolvido e não se deixar envolver nas aprendizagens dificilmente aprenderá.

Serão abordadas características da experiência matemática proporcionada na secção 8.1 e que são resultantes das formas que a professora usava para induzir o envolvimento efectivo dos alunos nas aprendizagens matemáticas (8.2), dos modos que a professora usava para levar os alunos a terem consciência da aprendizagem realizada (8.3) e da forma como os alunos foram desafiados a pensar profundamente sobre o que estavam a aprender (8.4). Na secção 8.5 é analisada a relação entre a experiência matemática proporcionada e as competências desenvolvidas agrupadas em constelações.

8.1 Características da experiência matemática proporcionada

A experiência matemática proporcionada aos alunos da professora-investigadora apresenta características importantes para a promoção da aprendizagem dos alunos. As práticas de ensino são direccionadas e orientadas por pressupostos da investigação educacional. As características gerais são as seguintes:

- Uso sistemático da dinâmica do trabalho de grupo;
- Actividade matemática em torno de um conjunto de tarefas estruturantes e diversificadas que mobilizam, de forma integrada, para além dos conteúdos preconizados, procedimentos fundamentais na geometria;
- Mobilização das três espécies de processos cognitivos na geometria: construção, visualização e raciocínio;

— Mobilização de recursos diversificados como forma de proporcionar uma experiência matemática mais enriquecedora e significativa;

— Recurso sistemático à comunicação matemática;

— Avaliação *centrada* em trabalhos e produtos, de diversas naturezas, realizados pelos alunos;

— Regulação sistemática da aprendizagem através da avaliação formativa realizada onde o *feedback* (escrito, oral e não verbal) esteve continuamente presente.

A partir da análise dos dados e da sistematização de informação passaremos a fundamentar as afirmações acima produzidas.

8.1.1 Uso sistemático da dinâmica do trabalho de grupo

A abordagem curricular em foco desenvolveu-se fundamentalmente em 18 aulas de acordo com a Tabela 6.1 do capítulo 6: 5 aulas em formato de trabalho de grupo para a realização de trabalho de projecto; 7 foram realizadas num formato de trabalho de grupo para a realização das tarefas propostas conforme melhor se pode constatar na Tabela 8.1 – 10 meios blocos em formato de trabalho de grupo e os 4 meio blocos restantes desenvolvidos no grupo turma; as 5 aulas restantes foram desenvolvidas no grupo turma.

Tarefa	Aula/bloco	Trabalho de grupo	Trabalho individual / Grupo turma
1	1º ½ bloco	X	
	2º ½ bloco		X
2	1º ½ bloco	X	
	2º ½ bloco		X
3	1º ½ bloco	X	
	2º ½ bloco	X	
4	1º ½ bloco	X	
	2º ½ bloco	X	
5	1º ½ bloco	X	
	2º ½ bloco	X	
6	1º ½ bloco	X	
	2º ½ bloco		X
7	1º ½ bloco	X	
	2º ½ bloco		X

Tabela 8.1: Trabalho de grupo versus trabalho individual na resolução das tarefas (7 blocos num total de 13)

Se considerarmos as unidades de meio bloco poderemos afirmar que 20 meio blocos em 36 foram realizados sob a forma de trabalho de grupo, isto é, cerca de 55% do tempo da abordagem curricular. Esta dinâmica e estratégia permitiram que o foco da atenção e do trabalho matemático realizado estivesse centrado nos alunos.

A dinâmica de trabalho de grupo, desta forma tão sistemática, não é muito usual nas salas de aula de matemática no 3º ciclo de Ensino Básico. Apesar de ter sido esclarecido no contexto precursor, ponto 5.2 do capítulo 5, que os alunos da professora investigadora já tinham trabalhado em grupo para resolver tarefas diversas (de investigação, experimentais e outras) fizeram-no de forma esporádica e casual ao longo dos períodos do 7º, 8º e 9º ano (1º e 2º período) – observar e analisar a Tabela 5.1, a Tabela 5.2 e a Tabela 5.3 do capítulo 5. Houve também algumas dificuldades acrescidas inerentes a esta dinâmica, que passarei a enumerar: os alunos tiveram que aprender a trabalhar em grupo, a valorizar esta forma de trabalho para a sua aprendizagem pessoal (ver a avaliação formativa no ponto 6.2.2.1 – o *feedback* nos grupos, no capítulo 6 e os *incidentes 2, 7, 8, 11, 24* e *30* nas fases didácticas das tarefas no item 6.1) e a saber gerir as regras, em particular a rotatividade da função de secretário, como está bem patente nos *incidentes 3, 6* e *17* nas fases didácticas das tarefas no item 6.1, apresentados no capítulo 6.

8.1.2 Actividade matemática em torno de um conjunto de tarefas estruturantes e diversificadas

A abordagem curricular foi desenvolvida a partir de um conjunto de tarefas estruturantes do tema em questão mobilizando procedimentos diversificados no estudo e aprendizagem da Geometria. Cada tarefa (trabalho de projecto e as 7 tarefas que foram trabalhadas no 3º período do ano 2004/2005) vale por si própria e proporciona aprendizagens significativas. Além disso, o conjunto das tarefas implementadas define uma abordagem curricular que permitiu trabalhar o tema de Geometria de forma global tendo em consideração os resultados da investigação em didáctica da matemática e os pressupostos curriculares em vigor (incluindo os conteúdos programáticos).

A Tabela 8.2 relativa ao trabalho de projecto sob o tema "As rotações estão em toda a parte", a Tabela 8.3 relativa às tarefas de trigonometria e a Tabela 8.4 relativa às tarefas de geometria no espaço, apresentam as tarefas categorizadas relativamente aos conceitos mobilizados (previamente trabalhados ou novos), aos procedimentos matemáticos requeridos para a sua resolução e ao tipo de tarefa.

Tarefas	Tipo	Conceitos		
		conhecidos	novos	Procedimentos
Trabalho de projecto	Trabalho de projecto	Rotação do senso comum; Fases de desenvolvimento de um projecto;	Rotação como conceito matemático;	Estudo da informação existente sobre rotações no manual adoptado; Observação de imagens existentes em diversos sectores da vida; Identificação de rotações nas figuras seleccionadas; Investigação de qual o centro de rotação e de qual a amplitude da rotação associada; Selecção de figuras/imagens/fotografias elucidativas das rotações; Representação gráfica sobre a figura seleccionada identificando o centro e a amplitude da rotação associada (figura objecto e figura imagem); Elaboração de um pré-esboço de um cartaz; Constituição de um portefólio com as figuras/imagens/fotografias seleccionadas; Elaboração de um cartaz.

Tabela 8.2: Conceitos e procedimentos matemáticos no trabalho de projecto

Apesar das tarefas serem estruturantes e constituírem o corpo substancial do trabalho a realizar na Geometria de 9º ano, as técnicas e o trabalho de rotina não foram descurados havendo uma selecção rigorosa e complementar às tarefas planificadas para que os alunos pudessem treinar e ganhar rapidez nos aspectos mais básicos necessários ao trabalho na Geometria.

Tarefas	Tipo	Conceitos		procedimentos
		já conhecidos	novos	
1	introdução aos conceitos de senα cosα tgα		razões trigonométricas: senα cosα tgα	construção de triângulos rectângulos com um ângulo de 60º; Medição de lados do triângulo com régua; Medição de ângulos de 60º com transferidor; Cálculo de quocientes.
2	introdução às relações entre senos e cosenos de ângulos complementares Introdução à Relação fundamental da trigonometria	razões trigonométricas: senα cosα; Teorema de Pitágoras	Relação entre senos e cosenos de ângulos complementares Ângulos complementares Relação fundamental da trigonometria;	Cálculo de senos e cosenos dos ângulos agudos de um triângulo rectângulo; Observação e identificação de regularidades entre senos e cosenos de ângulos complementares; Dedução da relação fundamental da trigonometria a partir da aplicação do Teorema de Pitágoras;
3	Aplicação dos conceitos aprendidos num contexto real	Média; Semelhança de triângulos e proporcionalidade entre lados correspondentes; tgα		Construção de um astrolábio; Medição de alturas de pessoas até à altura dos olhos; Medição de distâncias; Medição de ângulos de visualização com o astrolábio; Cálculo da altura de um objecto inacessível; Determinação da média de valores calculados pelos elementos de um dado grupo.

Tabela 8.3: Conceitos e procedimentos matemáticos nas tarefas de Trigonometria

Tarefas	Tipo	Conceitos		procedimentos
		já conhecidos	novos	
4	Precisão (revisitação) de conceitos básicos de Geometria; Exploração de 3 planificações distintas	planificação, face, vértice, aresta, lado; perímetro de polígono; área de um polígono; volume de um poliedro prismático ou piramidal;		Determinação de 3 planificações distintas a partir do poliedro construído com recurso ao *polydron* ; Contagem do número de vértices, arestas e faces de um dado poliedro; Determinação de perímetros, áreas e volumes de poliedros.
5	Resolução de problema com recurso a conceitos já trabalhados e a conceitos novos relacionados;	Conceitos ligados a ângulos, arcos e a circunferências; sector circular; Perímetros e áreas de círculo e de sector circular; Conceitos relacionados com o cone; Teorema de Pitágoras; Semelhança de triângulos, proporcionalidade;	coroa circular; área da coroa circular; tronco de cone; volume do tronco de cone;	Resolução de um problema; Aplicação da regra de três simples; Determinação do raio de um círculo dado o seu perímetro; Planificação de um tronco de cone; Determinação da área da coroa circular a partir da diferença de áreas das circunferências circunscritas a partir das quais se contrói a coroa circular; Determinação do volume do tronco de cone a partir da diferença dos volumes dos dois cones originais.
6	Recurso a conceitos já trabalhados e a conceitos novos relacionados;	Posição relativa de rectas e planos;	Critérios de paralelismo e perpendicularid ade;	Representação no plano de rectas e planos do espaço; Identificação de rectas, planos e respectiva posição relativa; Representação simbólica de rectas e planos;
7	Introdução a conceitos e a procedimentos		Hipótese; Tese; Demonstração	Demonstração de um teorema; Identificação da hipótese e da tese

Tabela 8.4: Conceitos e procedimentos matemáticos nas tarefas de Geometria no espaço

Alguns conceitos e conteúdos programáticos não estiveram abrangidos pela actividade e reflexão proporcionadas pelas sete tarefas referenciadas e pelo trabalho de projecto como, por exemplo, a esfera e superfície esférica e como construir um ângulo com um determinado valor para o seu co-seno. Para os salvaguardar foram trabalhados exercícios do manual adoptado e/ou de provas aferidas criteriosamente seleccionados pela professora investigadora e pela *critical friend* nos momentos que de encontro para realizar as conferências já referidas anteriormente. Também podemos observar a partir dos procedimentos referidos que se estabeleciam conexões entre a geometria e outras áreas da Matemática.

Observando as tabelas 8.2, 8.3 e 8.4 no que respeita à coluna designada de “tipo” podemos constatar que as tarefas têm características diferentes: enquanto umas têm como objectivo introdução de conhecimentos novos - o trabalho de projecto e a Tarefa 1, outras pretendem consolidar conhecimentos que já deveriam ter sido aprendidos – Tarefa 4, outras são simplesmente de aplicação de conhecimentos já adquiridos – Tarefa 3, trabalhando-os em contexto real, outras são mistas uma vez que trabalhando conhecimentos já adquiridos também têm como objectivo introduzir novos – Tarefa 2, Tarefa 5 e Tarefa 6, e, por último não só introduzir conhecimentos novos assim como um processo matemático novo a demonstração matemática – Tarefa 7. A Tarefa 5 caracteriza-se por ser uma situação problemática. Na coluna dos procedimentos matemáticos podemos identificar diferentes aspectos fundamentais característicos da experiência matemática e que os alunos experimentaram na actividade matemática proporcionada pelas tarefas respectivas.

Em síntese, podemos afirmar que as tarefas consideradas têm objectivos diferenciados (introdução de conhecimentos novos e/ou método, aplicação de conhecimentos previamente aprendidos e/ou trabalho conjunto de conteúdos que foram aprendidos separadamente), envolvem uma grande diversidade de procedimentos e permitiram fazer uma gestão dinâmica do currículo relativo à “Geometria no espaço” do 9º ano. A actividade matemática realizada, em torno deste conjunto de tarefas estruturantes e diversificadas, mobilizando conteúdos, processos e procedimentos matemáticos de forma integrada permitiu que a experiência matemática dos alunos fosse bastante diversificada e significativa.

8.1.3 Mobilização da construção, visualização e raciocínio na Geometria

Os processos cognitivos de construção, visualização e raciocínio (Duval, 1998) mobilizados e os procedimentos envolvidos na actividade matemática proporcionada por referência às tarefas são informação constante na Tabela 8.5.

Tarefas	procedimentos	Processos cognitivos na Geometria (Duval, 1998)
Trabalho de projecto	Estudo da informação existente no manual adoptado; Observação de imagens existentes em diversos sectores da vida; Identificação de rotações nas figuras seleccionadas; Investigação de qual o centro de rotação e de qual a amplitude da rotação; Selecção de figuras/imagens/fotografias elucidativas das rotações; Representação gráfica sobre a figura identificando o centro e a amplitude da rotação associada (figura objecto e figura imagem); Elaboração de um cartaz.	**Construção Visualização**
1	construção de triângulos rectângulos com um ângulo de 60º; Medição de lados do triângulo com régua; Medição de ângulos de 60º com transferidor; Cálculo de quocientes.	**Construção**
2	Cálculo de senos e cosenos dos ângulos agudos de um triângulo rectângulo; Observação e identificação de regularidades entre senos e cosenos de ângulos complementares Dedução da relação fundamental da trigonometria a partir da aplicação do Teorema de Pitágoras	**Visualização Raciocínio**
3	Construção de um astrolábio Medição de alturas de pessoas e de distâncias com fita métrica; Medição de distâncias; Medição de ângulos de visualização com o astrolábio; Identificação da semelhança de triângulos; Cálculo da altura de um objecto inacessível; Determinação da média de valores calculados pelos elementos de um dado grupo.	**Construção Visualização**
4	Determinação de 3 planificações distintas a partir do poliedro construído com recurso ao polydron; Contagem do número de vértices, arestas e faces de um dado poliedro; Determinação de perímetros, áreas e volumes de poliedros.	**Construção Visualização**
5	Resolução de um problema; Identificação da semelhança de triângulos Planificação de um tronco de cone; Construção de um tronco de cone com régua, compasso; Determinação da área da coroa circular a partir da diferença de áreas das circunferências circunscritas a partir das quais se contrói a coroa circular; Determinação do volume do tronco de cone a partir da diferença dos volumes dos dois cones originais.	**Construção Visualização Raciocínio**
6	Representação no plano de rectas e planos do espaço; Identificação de rectas, planos e respectiva posição relativa; Representação simbólica de rectas e planos;	**Visualização Raciocínio**
7	Demonstração de teoremas; Identificação da hipótese e da tese	**Visualização Raciocínio**

Tabela 8.5: Processos cognitivos envolvidos na resolução das tarefas

As tarefas foram seleccionadas para poderem ser realizadas em blocos/aulas. Pretendia-se desenvolver atitudes e valores de cidadania atribuindo a cada aluno o direito de aprender em respeito e responsabilidade e permitir que os alunos tivessem contacto com as três espécies de processos cognitivos necessários para a proficiência na Geometria -

construção, visualização e raciocínio (Duval, 1998) – ver Tabela 8.5 e consultar o item 4.3 do capítulo 4.

8.1.4 Mobilização de recursos diversificados

A mobilização e uso de recursos nas tarefas implementadas foram diversificadas e sistemáticas conforme se pode constatar na Tabela 8.6.

Tarefas	Recursos
Trabalho de projecto	Manual adoptado; Fontes bibliográficas diversas; Fotografias tiradas a monumentos, igrejas, etc.; Internet; Catálogos, revistas diversas (azulejaria, tapetes de arraiolos, etc.); Materiais de construção como azulejos e rodapés em madeira;
1	Manual adoptado papel e lápis, régua e transferidor
2	Manual adoptado papel e lápis
3	Manual adoptado construção de astrolábio (cartolina, régua, compasso e transferidor; palhinha, clip, fio com cerca de 20 cm e fita cola) astrolábio e fita métrica de cerca de 20 metros ficha de recolha de dados
4	*polydron* modelos de pirâmides e prismas diversos construídos com recurso ao *polydron* (um prisma e uma pirâmide por grupo) 3 planificações de cada prisma e de cada pirâmide ficha de registo de características das planificações
5	cartolina, régua, compasso, transferidor e tesoura construção de um tronco de cone sob determinadas condições
6	papel e lápis
7	Manual adoptado papel e lápis

Tabela 8.6: Recursos envolvidos na resolução das tarefas

Não se descurou o uso do manual adoptado, nem o recurso ao papel e lápis. No entanto, o uso de materiais esteve presente para proporcionar o aprofundamento da visualização, do rigor científico e das linguagens de formalização não só para os próprios alunos como para os restantes elementos da comunidade educativa (cartaz do trabalho de projecto, em particular). Assim os materiais construídos em sala de aula (astrolábio, modelos de prismas e pirâmides, modelos de planificações, tronco de cone, entre outros) e o *polydron* foram usados como meios para tornar a experiência matemática mais significativa uma vez que os alunos, num processo activo de construção de conhecimento, puderam mobilizar vários dos seus sentidos através de experiências com objectos reais.

8.1.5 Recurso sistemático à comunicação matemática

A comunicação matemática é uma capacidade transversal. A abordagem curricular também é caracterizada pelo investimento sistemático que se fez na comunicação matemática (com incidência na forma oral e escrita). O facto da dinâmica de sala de aula incidir bastante no trabalho cooperativo dos alunos, com especial incidência no formato de trabalho de grupo, levava a que os alunos tivessem que “negociar” a resolução das tarefas e a respectiva actividade entre eles (partindo assim dos conhecimentos pessoais), isto é comunicar matematicamente e de forma oral entre eles.

Tarefas	Produtos intermédios/**produto final**	**Comunicação**
Trabalho de projecto	**Cartaz** **Portefólio**	Cartaz Portefólio
1	construção de triângulos rectângulos com um ângulo de 60º **Relatório**	Relatório
2	**Relatório**	Relatório
3	construção de astrolábio por cada aluno realização de medições das respectivas alturas; Realização de medições da distância de cada um ao objecto seleccionado no pátio da escola com fita métrica; Realização de medições do ângulo de visionamento do topo do objecto seleccionado com o astrolábio construído; **Relatório com base na ficha** de recolha de dados devidamente preenchida e resolvida	Relatório
4	um prisma e uma pirâmide por cada grupo ficha com as representações de 3 planificações por cada figura assim como registo das propriedades/características solicitadas **Relatório com base na ficha**	Relatório
5	Resolução da situação problemática Planificação de um tronco de cone por grupo **Relatório**	Relatório
6	**Relatório**	Relatório
7	**Relatório**	Relatório

Tabela 8.7: A comunicação matemática escrita na resolução das tarefas

Como as 7 tarefas exigiam que fosse entregue um produto final sob a forma de relatório escrito - conferir na Tabela 8.7; os alunos tinham de escrever matematicamente as suas conclusões, argumentar, responder às questões e/ou solicitações feitas. A regra imposta de que o secretário teria de ser rotativo era uma estratégia para obrigar todos os alunos a exercerem e a exercitarem a comunicação escrita da matemática; o facto de cada aluno como secretário não estar a fazê-lo de forma individual e isolada também era deliberado para que não se sentissem tão angustiados nessa função e para que os pares no grupo ajudassem a melhorar a capacidade de organização e síntese de cada um dos elementos, competência fundamental na comunicação escrita. Apesar de haver um conjunto de regras e estratégias implementadas para que todos os alunos comunicassem matematicamente, por escrito, pelo menos uma vez durante a abordagem curricular implementada, houve alunos que nunca produziram qualquer relatório de grupo, a saber: Diogo Fontoura, Pedro, António Vilela, João Jorge e Tiago Pereira do 9º A, conforme se pode constatar na Tabela 6.19, do capítulo 6, item 6.2. e Samuel Lopes do 9º E, conforme se pode constatar na Tabela 6.21, do capítulo 6, item 6.2.

A comunicação matemática desenvolvida durante esta abordagem curricular serviu de ***meio*** natural e específico para os alunos poderem comunicar entre si e com a professora mas também como um ***fim*** nos produtos finais solicitados e no cartaz.

8.1.6 Avaliação centrada em produtos de diversas naturezas realizados pelos alunos

A avaliação das aprendizagens foi diversificada e contemplava produções individuais, um teste e as produções de grupo: 7 relatórios das tarefas e o cartaz e o portefólio do trabalho de projecto - ver tabela 8.7. O teste, envolvendo essencialmente competências de nível mais baixo (constelação de reprodução), e as produções de grupo, envolvendo predominantemente competências de nível mais elevado (integradas na constelação conexão e de reflexão), constituíram os produtos de diversas naturezas realizados pelos alunos, que recolhidos e avaliados, de forma sistemática, permitiram diversificar a informação que sustentou uma componente da avaliação sumativa – ver item 5.2.2 relativo aos critérios de classificação e item 6.2. As actividades de aprendizagem desenvolvidas a partir de tarefas, cujos produtos eram relatórios ou mesmo a actividade desenvolvida a partir o trabalho de projecto implementado também permitiram recolher informação para a avaliação não só da aprendizagem realizada pelos alunos como também do ensino: o ensino, a aprendizagem e a avaliação constituíram um ciclo articulado e coerente.

8.1.7 Regulação sistemática da aprendizagem através da avaliação formativa e do *feedback* (escrito, oral e não verbal)

Como a aprendizagem e a avaliação estavam ligadas de forma articulada e coerente isso permitiu ajustar o ensino de forma a incluir os resultados da investigação em didáctica da matemática tendo como referência os pressupostos curriculares em vigor e em atenção à população alvo a quem seria implementada. A regulação sistemática era realizada através do *feedback* (oral, não verbal e escrito) sistemático realizado em sala de aula no desenvolvimento da actividade matemática. De facto as tarefas implementadas cumpriam a tripla função: serem para ensinar, permitirem aprender e proporcionarem avaliar. O facto dos elementos de avaliação recolhidos serem diversificados e conterem *feedback* regular e sistemático potencialmente permitiram uma maior adequação a maior número de alunos assim como facilitavam que a professora investigadora pudesse actuar com mais propriedade junto de um maior número de alunos. Desenvolveremos mais aprofundadamente o aspecto da avaliação formativa no capítulo 9.

8.2 O esforço do professor para envolver os alunos na actividade matemática

Segundo Douady e Parzyzs (1998) é suposto que os alunos, numa sala de aula da disciplina de matemática, aprendam matemática. A aprendizagem é mais significativa se os alunos forem envolvidos em actividades que mobilizem o maior número de sentidos, em simultâneo, com a reflexão e raciocínio. Desse ponto de vista trabalhou-se com os alunos, de forma consciente e deliberada, o seu envolvimento e houve acções sistemáticas para que os alunos, sujeitos aprendentes, investissem com maior consciência nas aprendizagens realizadas e em profundidade. Nesta abordagem curricular as tarefas estão no centro da dinâmica da sala de aula. Os alunos deviam realizá-las no formato de trabalho de grupo. O conjunto de tarefas de aprendizagem (e de avaliação) foi criteriosamente seleccionado; as condições de implementação e os recursos suficientes foram devidamente salvaguardados.

8.2.1 Actuação procedimental estratégica

A actuação da professora era estratégica e visava o envolver todos os alunos na actividade matemática proporcionada pelas tarefas devidamente seleccionadas e criteriosamente implementadas. Podem-se identificar formas de actuação estratégicas e que seguiam uma lógica de prioridades, a saber:

i. As tarefas implementadas foram elaboradas de forma a que fossem suficientemente interessantes e desafiadoras, que induzissem o envolvimento dos alunos na actividade e trabalhos matemáticos – o que aconteceu na generalidade das situações e com a maioria dos alunos (situação considerada normal e que todos os professores anseiam). Há por vezes alunos que nos surpreendem pela positiva e pelo grande envolvimento que explica o trabalho realizado e como foi realizado – caso apresentado no *incidente 25*, relativo ao André Mota.

ii. No entanto houve alunos que não estiveram interessados ou disponíveis para se deixarem envolver/ trabalhar – caso do *incidente 6* com o Fábio; caso do *incidente 13* com uma aluna (ver item 6.1 do capítulo 6). Explicitava-se, então, no grupo, a importância do trabalho cooperativo ter a contribuição de todos e de cada um e o quão prejudicial pode ser para o grupo, em termos de produtos finais (e intermédios) a demissão do trabalho matemático de um dos seus elementos. Podia acontecer na turma como resistência às regras estabelecidas para o bom funcionamento disciplinar na sala de aula – caso do *incidente 4* (ver item 6.1 do capítulo 6) e *Conferência 5* (caso dos alunos Yuan, Pedro, Wang e Rui do 9ºE) - ver item 6.3 do capítulo 6. Caso os alunos ficassem sensibilizados e influenciados para se deixarem envolver, o professor tinha ganho, naquela altura, o(s) aluno(s) para o trabalho matemático e aumentavam, assim, as possibilidades de aprendizagem deste(s): tinha-se ganho o envolvimento do aluno no trabalho matemático.

iii. Mas podia acontecer que a recusa e atitude do aluno fosse de tal modo contrária ao que era esperado que pusesse o trabalho de grupo em risco (para além da sua aprendizagem) – caso dos *incidentes 7* e *8* (grupo do Nuno Pinto, José Eduardo, Cátia e Patrícia, do 9º E) - ver item 6.1 do capítulo 6. Nestas circunstâncias era fundamental abordar cada elemento no grupo e o aluno em questão chamando-os à atenção para os objectivos do trabalho de grupo, a sua importância na aprendizagem de cada um, relatado no *incidente 11* (ver item 6.1 do capítulo 6) e melhor desenvolvido na *Conferência 3* - ver item 6.3 do capítulo 6; abordar o grupo como uma unidade de trabalho e apelar à responsabilização de todos e de cada um pelo funcionamento do grupo e pela salvaguarda do trabalho matemático da sua responsabilidade e os esforços necessários para que houvesse sucesso. Caso o grupo ficasse sensibilizado e fosse mobilizado para o trabalho matemático em causa ter-se-ia ganho o grupo e todos os seus elementos para um envolvimento no trabalho matemático proposto – o que aconteceu com o grupo em causa.

iv. Poderia dar-se a situação de haver alunos a quem já se tinha dado oportunidades para mudarem de atitude na sala de aula e, mesmo assim, persistissem em não se deixarem envolver. Percebendo a professora que estariam alheios por qualquer motivo (puro desinteresse, simplesmente não quererem trabalhar, etc.) e que já não via qualquer maneira de os influenciar a mudar de atitude, recorria à informação aos pais - *incidente 10* (ver item 6.1 do capítulo 6) e melhor desenvolvido na *Conferência 4* (ver item 6.3 do capítulo 6) - como forma de conjuntamente encontrarem alternativas para mobilizarem os alunos e os pressionarem a envolver-se no trabalho matemático proporcionado. Nas situações em que esta diligência surtia efeito, os alunos sentiam-se pressionados pelos respectivos pais a trabalharem nas propostas de sala de aula e assim tinham sido influenciados a envolverem-se na actividade matemática.

v. Porém, houve situações, que apesar de terem sido implementadas todas estas acções, nenhuma influenciou a mudança de atitude dos alunos (poderia inventariar-se algumas razões que nos poderiam ajudar a compreender…): os alunos não querem envolver-se; o aluno não se envolve no trabalho matemático; não aprende e auto-excluiu-se da aprendizagem! – o professor não pode obrigar um aluno a aprender - trata-se de um processo voluntário! – caso do *incidente 20* (Álvaro Sampaio, Filipe Montes e Diogo Fontoura) e do *incidente 23* (Álvaro Sampaio, Filipe Montes e António Vilela) na turma do 9º A- ver item 6.1 do capítulo 6.

8.2.2 Dinâmica de sala de aula

A dinâmica de sala de aula no desenrolar da abordagem curricular em foco, tinha características que levavam a que os alunos vissem vantagens no seu envolvimento durante as aulas. Os alunos foram previamente informados e esclarecidos acerca da dinâmica e quais as regras que lhe dariam substância. Houve mudanças concretas que os alunos sentiram na organização de sala de aula:

i. o trabalho matemático passou a realizar-se e a fazer-se centrado nos pequenos grupos; de cada tarefa havia, pelo menos, a produção de um relatório como produto final; este relatório tinha duas funções, em simultâneo: ser o produto de uma tarefa de aprendizagem e, em simultâneo, ser um elemento de avaliação formativa que contribuiria para a avaliação sumativa do final de período; a responsabilidade pela elaboração dos relatórios seria gerida, de forma rotativa, por cada elemento do grupo de forma a que cada aluno pudesse experimentar a redacção do mesmo;

ii. a simultaneidade do relatório da tarefa de aprendizagem servir e ser valorizado como um elemento de avaliação, o ser recolhido para a avaliação final de período provocou uma maior responsabilização do grupo e de cada aluno pela produção do relatório com vista à sua melhoria; o que naturalmente pode conduzir a uma melhoria da qualidade da actividade matemática realizada; o que poderia traduzir-se numa aprendizagem mais significativa para os elementos do grupo;

iii. O trabalho com toda a turma, na correcção da actividade realizada, depois dos alunos terem estado a trabalhar em grupo e terem entregue o relatório da actividade realizada (na Tarefa 1, Tarefa 2, Tarefa 6, Tarefa 7 no 2º ½ bloco da aula ou na Tarefa 3, Tarefa 4 e Tarefa 5 na aula seguinte) onde o centro do trabalho eram eles próprios tomando consciência das suas dúvidas, parecia ser mais eficaz. Era-lhes pedido que registassem a correcção no respectivo caderno diário para que cada um ficasse com a totalidade da tarefa corrigida para poderem estudar.

iv. a devolução do relatório corrigido e com *feedback* dando conta da apreciação/avaliação da professora torna presente e actual que o relatório é um elemento de avaliação.

O facto de haver dois momentos distintos na dinâmica de sala de aula na Tarefa 1, Tarefa 2, Tarefa 6, Tarefa 7 no 2º ½ bloco da aula, com movimentação e reorganização diferenciadas poderia tornar-se num elemento distractor o que não aconteceu: esse momento de reorganização espacial dos alunos na sala de aula, permitia aliviar tensões existentes.

A dinâmica de sala de aula, com os diferentes momentos instituídos funcionou como uma organização de todos os alunos, na sala de aula, mobilizando-os para o desempenho das tarefas não excluindo nenhum; a atenção da professora estava direccionada para não permitir que nenhum aluno se auto-excluísse – ver *incidente 3* (Fábio – 9º B), *incidente 7, incidente 8, incidente 11* (José Eduardo, Nuno Pinto, Cátia e Patrícia – 9º E), *incidente 10* (Samuel e Francisco – 9º E) e *incidente 24* (Diogo Fontoura, Filipe Montes, Ricardo Santelmo e Maria – 9º A) - ver item 6.1 do capítulo 6. Podemos afirmar que se trata de uma forma de tensão mobilizadora para a aprendizagem da matemática, em sala de aula, que leva os alunos a envolverem-se ou a deixarem-se envolver pela actividade matemática.

8.2.3 Envolvimento disciplinar produtivo

Neste item iremos deter-nos sobre os quatro princípios identificados em práticas reconhecidas como caracterizadoras para acelerar o envolvimento disciplinar produtivo. Iremos centrar-nos em incidentes ocorridos na turma do 9º A e maioritariamente na Conferência nº1 relativa à aula de medição de objectos de altura inacessível apresentada. Os princípios apresentados por Engle & Conant (2002) são:

i. problematização do conteúdo,
ii. dar autoridade aos alunos,
iii. proporcionar que os alunos sejam responsáveis uns pelos outros e pelas normas disciplinares e
iv. providenciar recursos relevantes.

8.2.3.1 Problematização do conteúdo

No que se refere à problematização do conteúdo, os alunos, numa dinâmica de sala de aula centrada em tarefas diversificadas com situações problemáticas, poderiam questionar mais do que assimilar factos, procedimentos e outras "respostas"; eram encorajados a produzir hipóteses (Tarefa 1), a deduzirem relações (Tarefa 2 e Tarefa 7), a determinarem alturas desconhecidas de objectos (Tarefa 3), a fazerem construções com materiais e a investigarem várias planificações possíveis de um determinado poliedro (Tarefa 4), a construírem um tronco de cone (Tarefa 5) e identificarem rectas e planos em determinadas posições relativas (Tarefa 6).

8.2.3.2 Dar autoridade aos alunos

O facto de trabalharem em grupo permitia-lhes problematizar e negociar entre pares, isto é, exercer a autoridade de serem produtores do conhecimento e produtos intermédios e finais. Esta faceta pode ser analisada no *incidente 19* (ver item 6.1 do capítulo 6) resultante da disparidade entre os valores obtidos e que está patente na *Conferência 1* (ver item 6.3 do capítulo 6), também, devidamente assinalado. O erro nas medições resultava, naturalmente, de medições mal feitas e/ou com erros grosseiros. A professora poderia ter devolvido e explorado a situação matemática resultante do erro cometido tendo havido, por parte da professora, uma "*deficiente aceitação da autoridade concedida*".

8.2.3.3 Proporcionar que os alunos sejam responsáveis uns pelos outros e pelas normas disciplinares

Quanto à responsabilização, na *Conferência 1* (ver item 6.3 do capítulo 6), podem-se constatar várias situações de falta de responsabilização: pelas normas instituídas quando estão em grande grupo e deveriam estar em pequeno grupo, quando deviam transportar com o grupo para o pátio da escola a fita métrica, os astrolábios (cada um) e a ficha de registo de dados e os deixaram na sala de aula obrigando a gasto de tempo; quando todos os alunos no 9º A demoravam a seleccionar o secretário (*incidente 17*) e/ou não respeitando a rotatividade (*incidentes 3, 6, 17 e 24*) – item 6.1 do capítulo 6.

8.2.3.4 Providenciar recursos relevantes

Os recursos podem ser considerados desde recursos físicos concretos como régua, transferidor, rectângulos de cartolina, fichas de registo de dados e mesmo o manual adoptado até ao tempo necessário para se realizar uma discussão e/ou realizar determinado trabalho ou mesmo as condições climatéricas que podem impedir a realização de um trabalho de campo em condições. Quanto aos recursos podem ser referidos diversos incidentes, todos descritos no item 6.1 do capítulo 6, que esclarecem a importância deste princípio especialmente como suporte de um envolvimento disciplinar produtivo:

Incidente 1 – a falta de material de construção condicionou substancialmente a experiência matemática dos alunos e a possibilidade de aprofundarem a relação de invariância das razões trigonométricas face ao ângulo de 60º;

Incidente 9 – os alunos consideraram e usaram o manual como um recurso para resolverem dúvidas com que se deparavam;

Incidente 15 – as condições climatéricas instáveis poderiam ter impedido a realização da experiência matemática;

Incidente 16 – inexistência momentânea dos rectângulos de cartolina para a construção do astrolábio – resolvida em tempo útil;

Incidente 17 – a falta das fichas que deveriam ter sido levadas para a sala de aula condicionou profundamente a dinâmica e gestão curricular de sala de aula – contrapondo com a Conferência 2 onde os recursos suficientes estiveram presentes atempadamente e onde a dinâmica de sala de aula decorreu sem sobressaltos;

Incidente 21 – inexistência de tempo para reflectir sobre o trabalho prático realizado e que ocorreu nas 3 turmas da professora investigadora;

Incidente 12 (9ºB), ***incidente 26*** e ***incidente 29*** (9º E) – como a interferência de acontecimentos externos à sala de aula mas da dinâmica do contexto escolar e/ou da própria turma podem servir como distractores e forças de inércia para o envolvimento disciplinar produtivo (todos os incidentes se encontram no item 6.1 do capítulo 6).

Em síntese, o envolvimento disciplinar pode ser mais ou menos eficaz tendo em atenção aqueles quatro princípios e onde o princípio de providenciar os recursos relevantes para além de ser mais um princípio é condição necessária para que os três primeiros princípios e o envolvimento disciplinar produtivo possa ser, de facto, produtivo e permitir que os alunos realizem aprendizagens significativas. Nesta dinâmica há valores fundamentais que têm de contextualizar a prática de ensino, a saber: dar autoridade aos alunos para se expressarem, para desenvolverem ideias significativas, haver respeito não só pelos alunos como pelos grupos de trabalho e pelos respectivos ritmos de trabalho; este respeito tem de ser complementado pela responsabilidade no cumprimento de *timings*, pela necessária realização da actividade matemática, pela produção dos produtos intermédios e finais solicitados e pela entrega do produto final em cada tarefa. A dinâmica de sala de aula não é apenas da responsabilidade do professor como também dos grupos em funcionamento a quem são propostas tarefas relevantes e interessantes do ponto de vista da aprendizagem.

8.2.4 Balanços sistemáticos

Os balanços sistemáticos escritos a que os alunos foram sujeitos permitiu-lhes reflectir sobre os esforços, as estratégias realizadas, avaliar se foram suficientes para salvaguardarem o sucesso que podiam e desejavam – foi o caso do balanço que fizeram no início do 3º período com perspectivação de actuação estratégica para o futuro (3º período). Estes balanços para além de serem úteis aos próprios alunos para poderem ajustar estratégias de trabalho face aos objectivos e metas traçadas, foram também cruciais para a professora que pode perceber de que modo cada aluno se posicionava face à sua aprendizagem em geral e à sua aprendizagem específica a matemática.

Também se solicitou aos alunos quais eram as expectativas que tinham relativamente à actuação professora relativamente a cada um deles. Explicitar estas expectativas foi uma forma de se mostrarem abertos e disponíveis para facilitarem a sua aprendizagem, de informarem/desvendarem algumas circunstâncias e/ou características específicas que consideravam que a professora deveria ter em conta na sua relação com eles relativamente ao ensino e aprendizagem da matemática. A solicitação das expectativas relativamente à actuação da professora durante a abordagem curricular considerada em estudo foi realizada no início do 3º período – início de Abril e em meados de Maio aquando da implementação do instrumento *Listagem Dinâmica de Perguntas* - LDP.

No balanço do início de 3º período encontramos várias situações de alunos que reconheceram que se dedicaram pouco, tendo comportamento desadequado, estudando de forma insuficiente, não fazendo os TPC, preparando-se para os testes muito nas vésperas. Em termos de perspectivas futuras disponibilizam-se para ajustar o seu comportamento, fazerem mais regularmente os TPC propostos, estudarem mais regularmente. Todos os alunos se manifestaram interessados no seu sucesso académico.

Houve, no entanto aqueles que consideraram que o seu trabalho e comportamento foram adequados e que isso lhes permitiu salvaguardar o sucesso que pretendiam e manifestaram a intenção de o manterem (por exemplo, Márcia, Nuno Canadas, do 9º E; Beatriz, do 9ºB).

De qualquer modo todos os alunos enfrentaram o 3º período de uma forma enérgica tentando ajustar o tempo dedicado ao estudo durante o decurso normal do período e apresentando intenções de estudar mais para os testes, adaptarem o seu comportamento na sala de aula (falar menos, estar mais atento e participar mais activamente na dinâmica de sala de aula), aumentarem o seu empenho e, em particular, fazerem mais regularmente os TPC.

8.3 Como o professor levou os alunos a terem consciência da aprendizagem matemática realizada

Aprender pode ter vários significados para os alunos: desde memorizar até compreender pode haver uma escala de graduação de diversos tipos de aprendizagens. Contudo qualquer que seja o ponto de partida é claro que é preciso ter consciência da aprendizagem realizada para se poder definir estratégias de actuação futuras com o objectivo do sucesso académico. Com este objectivo os alunos fizeram um exercício de reflexão sobre o subtema leccionado, a trigonometria: a Listagem Dinâmica de Perguntas. Os alunos foram elucidados no início deste exercício de reflexão (I-5 na *Conferência 6* do item 7.3) e sempre que o solicitavam (I-48, na *Conferência 8* do item 7.3). A Listagem Dinâmica de Perguntas – LDP foi implementada duas vezes em cada turma sobre a mesma folha de papel. Na segunda vez os alunos deveriam formular mais perguntas sobre o tema usando uma cor diferente da primeira vez e identificar as questões a que já sabiam responder. Foi identificado: i) o que é que os alunos tinham gostado mais e menos; ii) o que tinham aprendido, o que lhes faltava aprender; iii) a professora pode ajustar a dinâmica às principais dúvidas e dificuldades explicitadas.

8.3.1 O que é que os alunos tinham gostado mais e menos

Das respostas dos alunos das três turmas da professora investigadora aparece muito destacada a construção do astrolábio para realizar medições de objectos de alturas inacessíveis como aquilo que os alunos mais gostaram (58% da população total), atingindo um valor bastante revelador na turma A, do nono ano: 93% dos alunos da turma (observar e analisar a Tabela 7.1 e a Tabela 7.2). Em seguida aparecem as razões trigonométricas ($sen\alpha$, $cos\alpha$ e $tg\alpha$) como os conteúdos que são os mais preferidos dos alunos (29% da população total) e o trabalho de grupo como sendo uma dinâmica preferida (18% da população total). Interessante é constatar que estes dois últimos itens também são eleitos pelos alunos como sendo aqueles de que gostam menos: razões trigonométricas (28% da população total) e trabalho de grupo (10% da população total). Se ligarmos os valores acima referidos podemos afirmar que 43% dos alunos inquiridos nem gosta nem desgosta das razões trigonométricas e que 72% também não nutre particular gosto ou repulsa pelo trabalho de grupo.

8.3.2 O que é que os alunos tinham aprendido e o que lhes faltava aprender

Os alunos perante as perguntas do que tinham aprendido e do que lhes faltava aprender[18] confundiram *aprender* com os *dar/leccionar conteúdos na aula pela professora* (ver I-9 na *Conferência 6* e I-46 na *Conferência 8* do item 7.3). Esta confusão, entre aprender e leccionar os conteúdos programáticos, levou a que os alunos respondessem à primeira questão indicando os conteúdos leccionados, ficando sem saber o que responder à segunda questão pelo facto de considerarem que já tinham sido leccionados todos os conteúdos programáticos relativos à trigonometria.

Aprender, para eles, era saber responder a perguntas (ver I-11 na *Conferência 6* do item 7.3). Identificaram que era difícil formular perguntas (I-48 na *Conferência 8* do item 7.3) e a professora investigadora também constata essa grande dificuldade nos alunos (I-9

[18] Questão 1 -"O que aprendi?
Questão 2 - "O que me falta aprender? Formular perguntas sobre o que falta aprender."

na *Conferência 6*, I-31 na *Conferência 7* do item 7.3). Os esforços que a professora investigadora fez não surtiram efeito uma vez que as concepções dos alunos acerca do que era aprender estavam estáveis. Quando, em alternativa[19] (ver I-9 na *Conferência 6* do item 7.3), a professora investigadora lhes solicitou que explicitassem e escrevessem as perguntas a que teriam de saber responder na trigonometria apareceram dificuldades em saber elaborar questões. De facto, saber formular questões sobre um determinado tópico/matéria é uma competência de elevado nível. Os alunos resistiram a formular as questões com o argumento que apenas teriam de saber responder às questões (André no 9º B – ver I-11 na *Conferência 6* do item 7.3 e Mafalda no 9º A – ver I- 46 na *Conferência 8* do item 7.3).

As turmas reagiram de maneiras diferentes à Listagem Dinâmica de Perguntas: o 9º A formulando bastantes perguntas na segunda vez da sua implementação em contraposição com uma média de perguntas, por aluno, muito baixa na primeira vez; o 9º E tendo uma média de perguntas por aluno bastante elevada na primeira vez e baixando consideravelmente na segunda vez (já não saberiam fazer muito mais perguntas?); o 9º B manteve médias muito semelhantes ainda que havendo uma média superior na segunda relativamente à da primeira vez. As médias totais e finais são bastante equiparadas ainda que apresentem percursos bastante diferentes, conforme já se explicitou acima (ver Tabela 7.10, Tabela 7.11 e Tabela 7.12 do capítulo 7).

8.3.3 O ajuste da gestão curricular às dúvidas e dificuldades dos alunos

Um dos objectivos da Listagem Dinâmica de Perguntas era a professora poder ajustar a dinâmica de sala de aula às dúvidas e dificuldades explicitadas pelos alunos. Assim,

i. em vez de fazer o que tinha previsto para a aula do 9º B, a 3 de Maio, resolver as propostas constantes nas páginas 86 e 87 do manual adoptado (I-16 e I-18 na *Conferência 6* do item 7.3), investe em exercícios e problemas em que os alunos explicitam ter dúvidas, relativas a propostas do manual adoptado da página 82 (I-14 e I-18 na *Conferência 6* do item 7.3);
ii. a dificuldade relativa ao uso de letras do alfabeto grego na trigonometria (I-19, I-21 na *Conferência 7* do item 7.3) foi detectada pelo facto dos alunos poderem

[19] Questão alternativa formulada pela professora “Quais são as perguntas a que tenho de saber responder, neste tema?”

explicitar as suas dificuldades. Este obstáculo cognitivo, do Fábio do 9º B, pode ser esclarecido na aula imediatamente a seguir à primeira aula de preenchimento da Listagem Dinâmica de Perguntas (I-29 e I-31 na *Conferência 7* do item 7.3); de facto a simbologia e o seu uso é um dos aspectos que traz dificuldades específicas e se pode constituir num obstáculo cognitivo a ter em conta e a superar no ensino da Matemática (I-27 e I-31 na *Conferência 7* do item 7.3).

iii. na aula de 5 de Maio, do 9º B, e depois de identificar todos os aspectos fundamentais em falta, a professora faz uma listagem de questões a abordar de forma a orientar a dinâmica de sala de aula (I-35 na *Conferência 7* do item 7.3) que implementa na aula imediatamente a seguir à primeira aula da Listagem Dinâmica de Perguntas;

iv. na aula do 9º A utilizou uma dinâmica similar à usada no 9º B (I-48 e I-50 na *Conferência 8* do item 7.3) uma vez que o diálogo com a Mafalda não lhe deu espaço de observação e não permitiu identificar outros itens em que os alunos desta turma pudessem ter dificuldades específicas (I-48 na *Conferência 8* do item 7.3).

Assim a Listagem Dinâmica de Perguntas cumpriu os dois objectivos enunciados para a sua criação: permitiu que os alunos tivessem uma maior consciência do que tinham aprendido apesar de não saberem bem o que era aprender e possibilitou à professora ajustar a dinâmica de sala de aula às dúvidas e dificuldades concretas dos alunos tendo sempre em consideração e como referência os conteúdos programáticos definidos no currículo.

8.4 Como os alunos foram desafiados a pensar profundamente sobre o que estavam a aprender

As actividades proporcionadas pelas tarefas por si só não garantem que os alunos aprendam. As actividades podem ser reduzidas a uma sequência de acções que alguém orienta e não ter qualquer consequência na aprendizagem dos alunos. A construção de diversos objectos, astrolábio e modelos geométricos de poliedros com o *polydron*, a realização de medições concretas (deles próprios, de distâncias) com fitas métricas, de ângulos de visualização com o astrolábio, de amplitudes de ângulos com o transferidor, de medições de lados de triângulos com régua envolveram vários sentidos e permitiram desenvolver os processos cognitivos da construção e da visualização. Estes processos são fundamentais na aprendizagem da geometria mas por si só são insuficientes. Associados a estes dois processos esteve o do raciocínio proporcionado pela reflexão sobre as experiências matemáticas diversificadas a que os alunos estiveram sujeitos ao longo desta abordagem curricular. Por isso e na medição de objectos de alturas inacessíveis, Tarefa 3, se pretendia que cada aluno realizasse a sua medição e o grupo apresentasse uma proposta de medição final do objecto seleccionado: os alunos tiveram que tomar uma decisão para resolver o problema de qual seria a medição seleccionada ou qual o melhor processo para o obter. Na Tarefa 4 solicitavam-se três planificações com o objectivo imediato da detecção de diversas planificações de um mesmo modelo de poliedro dentro do grupo, sendo esta uma forma empírica, rápida e eficaz dos alunos ficarem a saber que pode haver várias planificações (ver *incidente 28* – item 6.1 do capítulo 6); nesta tarefa também é valorizado o método de tentativa e erro na procura de respostas matemáticas: este método, nesta tarefa, só foi possível ser usado pelo facto de se ter como recurso o *polydron* e poder investir-se em diferentes planificações num tempo reduzido (de escassos minutos). Também a construção de poliedros (um determinado prisma e uma determinada pirâmide) tendo cada grupo o número de peças estritamente essencial obrigou a que os alunos reflectissem sobre o modelo solicitado e como deveriam unir as peças de forma adequada. Os alunos do 9º A e 9º B não apresentaram qualquer dificuldade na construção dos modelos poliédricos solicitados enquanto se revelou bastante difícil para a generalidade dos alunos do 9ºE (ver *incidente 27* – item 6.1 do capítulo 6): os alunos do 9º E assumiram esta tarefa de construção como uma situação problemática. Mais do que encaixar peças de *polydron* era necessário reflectir acerca do modelo poliédrico que se solicitava e encaixar as peças certas e da maneira correcta.

A Tarefa 5 apresentava uma situação problemática que a par da sua resolução envolvia o raciocínio para que os alunos pudessem fazer a construção do tronco de cone solicitado nas condições apresentadas (ver *incidentes 31* a *35*, todos relativos a dificuldades cognitivas e específicas do conhecimento matemático envolvido na Tarefa 5 do item 6.1 do capítulo 6).

Estivemos a referir a aspectos que induziam os alunos a pensar profundamente sobre o que estavam a aprender no âmbito do desenvolvimento das actividades proporcionadas pelas tarefas realizadas em formato de grupo. Mas também podemos referir-nos a aspectos trabalhados no grupo turma proporcionados por questões relevantes colocadas pela professora investigadora tais como: construir um ângulo agudo cujo co-seno tivesse o valor de 4/7 ou calcular o sen35º sem recurso a tabelas de valores naturais ou a calculadora, apresentado no ponto 7.3 na turma A (I-48 e I-50 na *Conferência 8*) e na turma B (I-31 e I-35 na *Conferência 7*) do 9º Ano, e usando apenas régua, transferidor e compasso.

8.5 Experiência matemática proporcionada e o desenvolvimento de competências

Este estudo também se centrou no desenvolvimento e na avaliação de competências, agrupadas em três constelações (reprodução, conexão e reflexão), tentando relacioná-las com o tipo de abordagem curricular a que os alunos estiveram sujeitos. A avaliação do desenvolvimento de competências foi feita a partir dos dados recolhidos pela implementação de dois testes espaçados de 3 semanas: o pré-teste ou Teste Diagnóstico e o pós-teste designado simplesmente de Teste conforme se pode constatar no item 7.2 do capítulo 7. Foram sujeitos aos dois testes (pré-teste e pós-teste) cinco de seis turmas da escola: 9º A, 9º B, 9º E, 9º D e 9º F- as três primeiras turmas da professora investigadora. As práticas de ensino em geometria nas turmas 9º A, 9º B e 9º E, realizadas pela professora investigadora, foco da investigação em curso, puderam ser confrontadas com as práticas de ensino nas turmas 9º D e 9º F de outros professores da Escola A no que respeita ao desenvolvimento de competências na geometria. Os resultados obtidos na globalidade indiciam que o tipo de abordagem curricular da geometria a que os alunos da professora investigadora estiveram sujeitos promove um melhor desempenho em tarefas que envolvem competências de conexão e de reflexão mantendo um desempenho análogo em tarefas que envolvem competências de reprodução. Podemos afirmar que as competências de nível mais elevado se desenvolvem pela realização de tarefas contextualizadas, de naturezas e estratégias diversificadas, onde a avaliação é componente integrada com o ensino e a aprendizagem. Também se analisou o raciocínio dedutivo integrado na constelação reflexão: a questão dos testes de competências (no Diagnóstico e no Teste) era rigorosamente a mesma e era a única questão relativa ao raciocínio dedutivo. Na constelação reflexão constatou-se que há ganhos normalizados positivos nas turmas 9º A e 9º B e ganhos normalizados negativos nas turmas 9º D e 9º F (ver Gráfico 7.5 do capítulo 7); já no que respeita ao raciocínio dedutivo houve ganhos consideráveis nas turmas 9º A (cerca de 20%) e 9º B (cerca de 15%), alguns ganhos nas turmas de 9º E (cerca de 2%) e de 9º D (cerca de 1%) e sem qualquer ganho na turma do 9º F (0%).

Assim, podemos dizer que este tipo de abordagem curricular promoveu o desenvolvimento de competências desde os níveis mais baixos de reprodução até aos níveis mais elevados de conexão e de reflexão. O investimento em tarefas diversificadas, de naturezas diferentes, mobilizando processos e procedimentos diversificados da disciplina de matemática sem esquecer o treino de algoritmos e a prática de técnicas matemáticas promoveu o desenvolvimento não só de competências de reprodução mas também competências de conexão e de reflexão. Sujeitar os alunos quase exclusivamente a tarefas e resolução de problemas rotineiros, com recurso exclusivo a técnicas e algoritmos pode contribuir para o desenvolvimento de competências de reprodução mas dificilmente promoverá o desenvolvimento de competências de mais alto nível, de conexão e de reflexão.

A complexidade em educação é a característica dominante e será difícil realizar mudanças e investir em abordagens curriculares que tenham produtos finais predeterminados. No entanto com este estudo percebe-se que a avaliação formativa apoiada numa mediação devidamente organizada e gerida pelo professor, onde haja uma integração do ensino, da aprendizagem e da avaliação, promove o desenvolvimento de competências de conexão e de reflexão sem deixar de desenvolver as competências de reprodução como qualquer outro tipo de ensino.

9. Características da avaliação formativa

A avaliação estava integrada no processo de ensino e da aprendizagem. A avaliação formativa era a modalidade privilegiada de avaliação, com a função principal de melhorar e regular as aprendizagens. Assim, os critérios de avaliação da disciplina de Matemática foram claramente explicitados aos alunos pela professora investigadora; as dimensões de avaliação consideradas: capacidades e aptidões e atitudes e valores para além dos conhecimentos também foram explicitados; para além dos testes os alunos identificaram no currículo outros instrumentos de avaliação, a saber: relatórios de grupo, relatórios individuais, trabalhos de grupo, trabalhos individuais e projectos (ver Tabela 7.6 do item 7.1.2.6). Isto significa que a avaliação promovida pela professora investigadora compreendeu as vertentes individual e social a partir de uma diversidade e variedade de estratégias, técnicas e instrumentos de avaliação, adequados à diversidade e natureza das aprendizagens, o que é coerente com o investimento nas tarefas de aprendizagem de natureza diversificada, mobilizando diferentes formatos de trabalho (ver Tabela 7.2 do item 7.1.2.2) e de recursos integrados (ver Tabela 7.3 do item 7.1.2.3). Também houve uma atenção especial aos percursos e evolução dos alunos e, em particular, ao longo da abordagem curricular em estudo neste trabalho de investigação como se poderá constatar pelos aspectos referidos no item 6.2.2.1 relativo ao *feedback* em grupos e como será tratado mais detalhadamente no item 9.3.

O carácter essencialmente formativo da avaliação realizada pela professora investigadora foi uma constante ao longo da abordagem curricular evidenciando aspectos em que as aprendizagens dos alunos precisavam de ser melhoradas, apontando alguns modos de superação das dificuldades, valorizando e tomando como base o conhecimento dos alunos assim como dos seus interesses e aptidões.

Neste item iremos abordar alguns aspectos específicos de que se revestiu a avaliação formativa durante o trabalho de projecto (9.1), no desenvolvimento das tarefas (9.2), no processo evolutivo de três grupos (9.3) e, por fim, sistematizar algumas características da avaliação enquanto processo fundamental globalizante (9.4).

9.1 A avaliação formativa no trabalho de projecto

A avaliação realizada durante o trabalho de projecto estava centrada tanto nos processos como nos produtos (intermédios e finais), nas realizações directamente observáveis e de acordo com critérios previamente definidos (cada aluno tinha ou não trazido as 3 a 4 imagens/figuras, estava ou não a participar construtivamente no trabalho de projecto) e demonstrava compreender ou não a temática das rotações (de acordo com a figura/recorte trazido demonstrava compreender ou não). A avaliação centrava-se sobretudo no desempenho mais do que nos conhecimentos específicos exigidos: desenvolver o projecto exigia uma diversidade de conhecimentos (matemáticos, de comunicação, de organização, de relacionamento no grupo, …); no entanto os alunos tinham que investir num conjunto de procedimentos complexos que não se poderiam reduzir à soma dos conhecimentos necessários.

O professor ao apoiar o desenvolvimento do trabalho de projecto teve que o fazer de forma contínua e sistemática. Seria bastante contraproducente e pouco pedagógico realizar a avaliação apenas no final e certificar se os alunos tinham ou não sido capazes de realizar o trabalho de projecto. Assim, a avaliação realizada apoiava os alunos, organizados em grupos, na realização das actividades com estratégias eficazes e envolventes e a experiência matemática realizada é adaptada às diferenças individuais uma vez que é centrada nos alunos, nas suas aptidões e interesses.

No que respeita aos produtos concretos e finais (cartaz e portefólio) e apesar de estarem previamente determinados e obedecerem a características definidas proporcionaram o recurso à criatividade, autonomia e iniciativa de cada grupo: a discussão da professora acerca de um protótipo prévio do cartaz, com cada grupo, permitiu melhorar a apresentação/comunicação do cartaz e a clareza da mensagem nele contida – a disposição das figuras e da informação matemática sobre elas, as cores da cartolina escolhida, a disposição dos elementos obrigatórios exigidos. A professora também pode aconselhar o recurso a figuras/elementos figurativos de forma a que no conjunto das três turmas não houvesse repetição das figuras seleccionadas e de forma a que, na exposição na comunidade edscolar, se pudesse contar com uma diversidade e variedade dos aspectos figurativos para poder captar o interesse da generalidade dos seus elementos.

Assim, a avaliação formativa existente na planificação, implementação e realização do trabalho de projecto foi fundamental nas diferentes fases para que os alunos pudessem recorrer a competências e estratégias de mobilização de conhecimentos para a consecução do trabalho produtivo materializados em produtos finais bastante concretos (cartazes e portefólios) onde se coligiram as figuras/imagens/fotografias recolhidas pelos alunos.

- A avaliação formativa realizada na planificação observou-se
  - na selecção de temas que os alunos pudessem gerir a partir do conhecimento que tinham do senso comum das rotações e a partir do estudo do tema no respectivo manual; no entanto havia abertura para integrar outros temas igualmente interessantes. Foi o que aconteceu com o grupo do 9º A, Álvaro, André, Helena, e Mariana, que trabalhou as rotações nas jantes ou com o grupo do 9º E, Nuno Pinto, Cátia, Patrícia e José Eduardo que estudou as rotações nas cruzes, enquanto símbolos;
  - na escolha de actividades sequenciais que pudessem ser geridas por alunos de 9º ano;
  - na proposta de produtos finais simples com suporte físico acessível a todos os alunos (a cartolina) e que impedisse a cópia (*copy & past*) de trabalhos expostos na *internet*.
- A avaliação formativa realizada esteve presente no desenvolvimento do projecto
  - sensibilizando os alunos para o trabalho em grupo em colaboração uns com os outros (dentro e fora dos grupos) e valorizando a partilha de opiniões e a construção e síntese de informação necessária durante todo o processo realizado em sala de aula;
  - acompanhando o trabalho nos grupos, facilitando o processo e desafiando os alunos a superarem-se e/ou a concretizarem as propostas realizadas sem permitir que houvesse alunos que se auto-excluissem.
- A avaliação formativa esteve presente durante a realização dos produtos finais:
  - na elaboração do cartaz acompanhando e sensibilizando os grupos: para opções visuais e estéticas apelativas sem descurar nunca a mensagem matemática relativa ao tema em questão assim como o rigor da representação gráfica dos elementos essenciais da rotação (centro e amplitude do ângulo ao centro associado); problematizando a escolha de materiais de desenho e composições gráficas que valorizassem as opções realizadas. Todos os grupos apresentaram

cartazes que foram expostos. O trabalho realizado, em particular os cartazes, puderam ser alvo da hetero-avaliação aquando da exposição pública.

— na elaboração do portefólio a recolha das imagens/objectos foi deixada muito à consideração dos alunos nos grupos para além e nunca ter sido feito o ponto da situação relativamente à sua organização. A professora investigadora constatou, já na fase final, que os alunos do 9º E não tinham organizado qualquer portefólio pelo que se tornou num facto (ver na Tabela 6.21 no item 6.2.1) e não houve tempo para se poder intervir e influenciar o processo de organização. Todos os grupos do 9º A e do 9º B apresentaram portefólios. Poderemos afirmar que o acompanhamento da professora investigadora na elaboração do portefólio no 9º E revelou-se pouco eficaz. Seleccionar fotografias/imagens para elaborar um cartaz não implica que se organizem, de forma sistemática, os elementos recolhidos pelos diferentes alunos de cada grupo. De facto, os alunos do 9º E recolheram imagens ou mesmo objectos mas não organizaram um portefólio de figuras/imagens. Por outro lado, poderemos problematizar se a organização do portefólio resultou da avaliação formativa da professora investigadora ou se os alunos do 9º A e 9º B já tinham desenvolvido competências de organização e as aplicaram à elaboração do portefólio.

Propostas de melhoria para situações futuras: a professora acompanhar o processo de elaboração do portefólio registando, por exemplo, quantos registos/imagens foram trazidos por cada aluno no grupo questionando quais as razões explicativas para a situação de cada um e lembrando amiúde da importância/pertinência da sua organização em portefólio.

9.2 A avaliação formativa nas tarefas

A avaliação não existe por si só mas pelo papel regulador das aprendizagens. De facto a avaliação desenvolvida nas tarefas implementadas foi concretizada e materializada através do *feedback* (escrito, oral e não verbal) que era dado de forma sistemática e contínua aos alunos no desempenho da resolução das tarefas que lhe eram propostas em sala de aula quer de forma individual quer como elementos fundamentais de um dado grupo. No que respeita às tarefas, e como já foi dito anteriormente, havia um conjunto de regras que foram explicitadas. No grupo haveria um aluno que assumiria as funções de secretário de forma rotativa para que todos pudessem executar a comunicação escrita e, pela experiência de comunicação, supervisionada pelo grupo, pudesse tornar-se mais experiente e melhor comunicador. Deveriam registar as suas produções numa folha devidamente identificada e entregue à professora no final de cada actividade, o relatório. As produções seriam levadas pela professora para análise e avaliação. Em síntese, o grupo teria de decidir quem seria o secretário e de produzir um relatório por tarefa em cada aula. A professora, por sua vez, em registos próprios, identificava o secretário e a avaliação qualitativa com que o relatório tinha sido apreciado. O relatório com o registo do *feedback* escrito era entregue ao respectivo secretário que o deveria arquivar. A professora investigadora nem sempre entregou os relatórios de forma célere aos alunos devido a várias dificuldades (gestão de trabalho, *timings* diversos). Também nem todos os alunos tinham cadernos diários devidamente organizados. Estes dois aspectos (a não entrega do relatório devidamente apreciado de forma célere e a pouca organização dos cadernos diários dos alunos) constituíram-se em factores limitativos da maior eficácia da avaliação formativa realizada sob a forma de *feedback* escrito.

A função rotativa de secretário

A rotatividade do exercício da função de secretário não foi estritamente seguida. Esta regra era condicionada pela presença e assiduidade às aulas dos alunos a quem a função calhava. Pretendia-se que, pelo menos uma vez, na sequência das tarefas implementadas, cada aluno tivesse exercido a função. Na turma B assim aconteceu (conferir na Tabela 6.20 do item 6.2.1); no entanto na turma do 9º A e do 9º B, da professora investigadora, houve 6 alunos que nunca secretariaram durante toda a abordagem curricular em foco.

Ora assumir que estes alunos nunca secretariaram significa constatar que os restantes elementos do grupo não consideraram ser pertinente a função de secretariar e a professora investigadora não ter estado suficientemente presente para os responsabilizar por tal situação.

Podemos dizer que a avaliação formativa não foi suficientemente eficaz para que se cumprissem as regras com a finalidade de eles experimentarem serem responsáveis pela comunicação matemática escrita do grupo.

A entrega dos relatórios com *feedback* escrito

De acordo com a apresentação das tarefas no ponto 6.1 só a turma E, do nono ano, foi recebendo ao longo do tempo, de forma regular, os relatórios com as anotações/comentários da professora e a respectiva avaliação.

Dos estudos e investigações educacionais é fundamental que o *feedback* seja dado em tempo útil de forma a produzir os efeitos pretendidos. A turma do 9º A só os recebeu nas últimas aulas do 3º período; a turma do 9º B foi recebendo mas não tão regularmente como seria de esperar. Só a turma do 9ºE foi recebendo regularmente ao longo da abordagem curricular em estudo. As vantagens da entrega dos relatórios com o *feedback* registado (avaliativo e descritivo) foram maximizadas na turma do 9º E que os recebia regularmente após as aulas em que realizavam as tarefas no formato de trabalho de grupo. A turma do 9º B pode usufruir, também, em tempo útil. Quanto à turma do 9º A pode não ter retirado daí qualquer benefício pois só os recebeu no final do período.

Desta forma a professora investigadora assumiu uma postura de facilitadora, partilhando o seu poder de avaliadora com os alunos, responsabilizando-os igualmente pelas suas aprendizagens, analisando em conjunto as estratégias para auto-regulação e auto-controlo do processo de aprendizagem durante as aulas em trabalho de grupo e, posteriormente, de forma individual para colmatar lacunas pessoais de aprendizagem.

9.3 A avaliação formativa sobre a forma dos grupos trabalharem

Para analisarmos a avaliação formativa nos grupos iremos centrar-nos nos resultados obtidos da análise do que se passou em três grupos referidos no ponto 6.2.2.1: o grupo do 9º B constituído pela Beatriz, Fábio e Tânia Resende; o grupo do 9º E constituído pela Cátia, José Eduardo, Nuno Pinto e Patrícia e o grupo do 9ºE constituído pelo Francisco, Jorge, Nuno Canadas e Samuel. Os grupos e os seus elementos são diferentes entre si e exigem comportamentos adequados do professor para funcionarem de forma eficiente salvaguardando a aprendizagem matemática.

Grupo A com elementos dominantes e com altas expectativas e outros com falta de auto-estima. É normal que alguns grupos, na sala de aula, tenham alunos dominantes e com altas expectativas e outros com falta de auto-estima e de auto-confiança. Gerir um grupo com estas características obriga a criar condições para que:

a) os alunos dominantes aprendam a dar espaço e a ganhar confiança no contributo dos outros;

b) os mais tímidos e menos confiantes possam melhorar as suas competências e aprendam a ocupar o espaço a que têm direito como aprendizes;

c) o grupo, como um todo, saiba rendibilizar o trabalho diferenciado dos seus elementos e potenciar, em cada aluno, a melhoria dos conhecimentos, dos procedimentos e das competências matemáticas mobilizadas.

Grupo B constituído por um elemento que ofereça resistências à dinâmica de trabalho de grupo - É natural que noutros grupos haja alunos que apresentem resistências ao trabalho proposto e obstruam, de forma significativa o trabalho do grupo como um todo. Gerir um grupo com estas características obriga a criar condições para que:

a) os alunos que apresentem resistências ao trabalho proposto sejam confrontados com o seu comportamento no grupo assim como com as respectivas implicações: tomem consciência da qualidade da sua participação e lhes seja dada hipótese de mudarem de atitude;
b) o grupo, tomando consciência da situação, tenha oportunidade de comprometer-se, de forma voluntária e deliberada, com todos os seus elementos mesmo com aqueles que apresentam certas características específicas;
c) todos os elementos do grupo sejam responsabilizados pelo o funcionamento do grupo realizando a actividade matemática necessária à resolução das tarefas propostas.

O trabalho com alunos que apresentam resistências activas ao trabalho na sala de aula é bastante difícil. A mudança de atitude desses elementos pode ser morosa e difícil podendo apresentar-se com avanços e recuos. O objectivo do professor será obter uma mudança na relação desses alunos com a matemática. No entanto, é fundamental o investimento neste tipo de alunos uma vez que o seu comportamento compromete a respectiva aprendizagem e a do grupo de que fazem parte. É importante convencer estes alunos de que são capazes de enfrentar uma actividade matemática e de que vale a pena fazê-lo (Douady e Parzysz, 1998). Este processo educacional não é linear e, por isso, é fundamental estar-se atento à dinâmica dos grupos em que estão inseridos para que o trabalho proposto possa ser realizado de forma positiva e proporcionar aprendizagens significativas para todos os elementos do grupo.

Grupo C – grupo que tem alunos que se manifestam alheios à actividade matemática. No caso desses alunos pode ser necessário recorrer à autoridade dos pais para que os alunos em questão sejam induzidos a mudar de atitude na sala de aula de matemática. É comum existir alunos num determinado grupo que estão alheios à dinâmica de sala de aula e que se mostrem mesmo indiferentes ao envolvimento proporcionado por diferentes tarefas. Gerir um grupo com estas características obriga a criar condições para que:

a) os alunos que se mostrem alheios sejam induzidos e influenciados a trabalhar nas tarefas propostas recorrendo gradualmente desde o diálogo com eles, à influência do grupo em que estão inseridos até à solicitação da interferência dos pais comunicação da situação;
b) no grupo e através de reforço positivo possam ajustar os respectivos comportamentos e atitudes à necessária aprendizagem da matemática com a colaboração e participação activa de todos os seus elementos.

O trabalho com alunos que se mostram alheios e indiferentes ao trabalho na sala de aula é bastante difícil. Experimentar diferentes estratégias é fundamental. Este processo de alheamento nem sempre é realizado de forma consciente e deliberada nos adolescentes. O recurso aos pais e encarregados de educação é praticamente o último recurso havendo mesmo alunos em que esta estratégia não tem sucesso. Contudo para o trabalho de grupo esta situação é dramática não só individualmente para os alunos em questão mas para o grupo, especialmente para a qualidade do trabalho de grupo produzido e, por isso, tão importante para a aprendizagem matemática.

Com a apresentação destes três tipos de grupos pode-se constatar que a professora investigadora teve diferentes tipos de actuação adequadas aos grupos e respectivos elementos, tendo acompanhado a evolução e o comportamento social dos grupos enquanto desenvolviam as tarefas e estavam envolvidos nas actividades por elas proporcionadas. A recolha sistemática de informações de diversas naturezas serviu para reorientar de forma constante a acção de ensino e mobilizar os alunos, nalgumas aulas organizados em grupos, para realizarem experiências de aprendizagem mais significativas. A realidade de sala de aula, e por mais que esta seja minuciosamente planeada com previsão específica do que lá poderá acontecer, é sempre um espaço e um tempo bastante dinâmicos marcados pela complexidade, onde o ensino se desenvolve e onde o professor tem de tomar decisões no momento e resolver problemas inesperados.

9.4 A avaliação formativa, processo fundamental e globalizante

A capacidade de recolher, elaborar e interpretar informações provenientes do contexto educacional, no qual o ensino ocorre, é um processo limitado física e temporalmente. A função fundamental da avaliação, para o professor, é a de informação acerca dos processos de ensino e da sua eficácia, do desenvolvimento dos seus alunos (e de cada aluno em particular) relativamente às aprendizagens realizadas para poder tomar decisões fundamentais relativas ao ensino que promove e ao *feedback* a disponibilizar no sentido de ajudar os alunos a ajustar os seus comportamentos para melhor aprenderem. Assim, preparar o ensino, orientar os alunos e avaliar os seus trabalhos e desenvolvimentos específicos são aspectos diferentes decorrentes da avaliação realizada pelo professor relativamente ao processo didáctico.

Todas as informações recolhidas quer relativamente aos produtos produzidos durante a realização das tarefas de diferentes naturezas (trabalho de projecto, resolução de situações problemáticas, etc.) quer relativamente aos processos desenvolvidos foram coligidas e interpretadas globalmente de forma a fundamentarem decisões de gestão e desenvolvimento curricular e a proporcionarem *feedback* regular quer aos grupos quer aos seus elementos para incrementar e potenciarem melhores aprendizagens. A avaliação formativa com as suas próprias características fica condicionada ao número de alunos numa turma, às formas de organização proporcionadas (é diferente avaliar 28 alunos numa turma ou 7 grupos que estão a funcionar numa turma de 28 alunos), à lógica de relação e coerência entre o ensino, a aprendizagem e a avaliação implementadas (é diferente ter momentos específicos para a avaliação, normalmente depois de concluída uma unidade didáctica, ou a avaliação decorrer directamente das actividades de aprendizagem) no início, durante e após a unidade educativa.

	Construtivismo	
	Controlo	**Aprendizagem**
Para que se avalia?	Prestar contas a um colectivo sobre as competências adquiridas e informar acerca dos pontos frágeis.	Conhecer como aprende o aluno e proporcionar ajudas.
Quem avalia?	Entidades e organismos independentes, mas conhecedoras do contexto educativo.	O docente mas também os alunos.
Quem é avaliado?	O aluno, mas consideram-se dados do contexto educativo e familiar para interpretar os resultados.	O aluno (avaliação formativa) e o professor (avaliação formadora).
O que é que se avalia?	As competências necessárias para enfrentar um problema real num determinado contexto.	
Como se avalia?	De forma contextualizada, individual ou em grupo, através de problemas com condições autênticas.	
Onde se avalia?	Opções distintas (na escola/agrupamento, em casa, no laboratório, a realizar trabalho de campo, etc.)	
Quando se avalia?	Antes, durante e depois de uma unidade de ensino.	

Tabela 9.1: A avaliação no paradigma construtivista (adaptado de Monereo e Castelló, 2009: 25)

A avaliação formativa também beneficiou dos balanços sistemáticos que eram solicitados pela professora investigadora realizados pelos alunos de forma escrita. Na Tabela 9.1 podemos constatar a síntese de aspectos relativos à avaliação, num paradigma construtivista segundo a perspectiva de Monereo e Castelló (2009: 25).

10. Relação entre as tarefas planificadas e as experiências matemáticas proporcionadas

As tarefas planificadas foram, em geral, suficientemente complexas e diversificadas para pôr em funcionamento tipos de processos de aprendizagem variados e que permitissem recolher informação para a avaliação formativa. Estavam previstas 9 tarefas para 10 blocos: 3 tarefas de trigonometria em 4 blocos e 6 tarefas de geometria no espaço para 6 blocos. Foram implementadas as 3 tarefas de trigonometria (Tarefa 1, Tarefa 2 e Tarefa 3) em 3,5 blocos e 4 tarefas (Tarefa 4, Tarefa 5, Tarefa 6 e Tarefa 7), de geometria do espaço em 5 blocos. As tarefas do manual não sofreram qualquer alteração (as de trigonometria (as três primeiras - Tarefa 1, Tarefa 2 e Tarefa 3) e a tarefa que tratava a Geometria como construção lógico-dedutiva (última tarefa a ser implementada – Tarefa 7)); as tarefas que foram concebidas pela investigadora e a *critical friend* (Tarefa 4, Tarefa 5 e Tarefa 6) foram ajustadas quer ao tempo disponível quer aos objectivos preconizados.

<table>
<tr><th rowspan="4">Tema</th><th colspan="6">Tarefas</th></tr>
<tr><th colspan="2">Planificadas</th><th colspan="3">Implementadas</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Designação</th><th rowspan="2">nº de blocos</th><th rowspan="2">Designação</th><th colspan="2">nº de blocos</th></tr>
<tr><th>trabalho em grupo</th><th>discussão/ correcção na turma</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Trigono metria</td><td>Tarefa T1</td><td>1</td><td>Tarefa 1</td><td>0,5</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Tarefa T2</td><td>1</td><td>Tarefa 2</td><td>0,5</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Tarefa T3</td><td>2</td><td>Tarefa 3</td><td>1</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Geometria no espaço</td><td>Tarefa G1</td><td>1</td><td>Tarefa 4</td><td>1</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Tarefa G2</td><td>1</td><td>Tarefa 6</td><td>0,5</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Tarefa G3</td><td>1</td><td>Eliminada</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Tarefa G4</td><td>1</td><td>Tarefa 5</td><td>1</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Tarefa G5</td><td>1</td><td>Eliminada</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Tarefa G6</td><td>1</td><td>Tarefa 7</td><td>0,5</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td>10</td><td></td><td colspan="2">8,5</td></tr>
</table>

Tabela 10.1: Tarefas planificadas e tarefas implementadas

A tarefa planificada que trabalhava a relação de Euler (Tarefa G3) e a tarefa planificada que tinha como recurso o *Geometer's Sketchpad*- GSP (Tarefa G5) não foram implementadas dada a exiguidade do tempo (13 blocos no total): a relação de Euler já tinha sido trabalhada no 7º Ano de escolaridade, nas turmas A e B, e, para estes, seria uma (re)visitação; no caso da tarefa com recurso ao *software* dinâmico GSP seria preciso mais tempo (pelo menos 1 bloco) para que os alunos se familiarizarem com os comandos/menus e o que especificamente faziam (o GSP é considerado recurso para o trabalho matemático e, por isso, um meio para enriquecimento/aprofundamento do trabalho matemático e não como um fim em si mesmo). Para além disso, na Tarefa G5 estava previsto tratar do processo de demonstração matemática que também seria tratado com a Tarefa G6. Assim, optou-se por implementar a Tarefa 7 (na planificação, Tarefa G6) que introduzia, de forma directa, o método de demonstração matemática no mais curto espaço de tempo – 1 bloco.

Em todas as tarefas e, de um modo geral, tinha sido pensado que os alunos apresentariam na turma, por grupos, as resoluções de grupo das tarefas à turma: por norma não foram realizadas; nalgumas tarefas um ou outro grupo apresentou as suas maneiras específicas de resolução ao grupo turma. Também tinha sido planeado que o suporte de apresentação deveria ser o acetato o que nunca aconteceu.

As tarefas eram realizadas em grupos e, num segundo momento, já no grupo turma era feita a correcção/exploração dos conteúdos/processos trabalhados. Isto é, de um modo geral, a dinâmica de sala de aula, em blocos poderia ter dois momentos: um primeiro em grupo, centrado nos alunos e no seu trabalho matemático e um segundo momento no grupo turma onde o trabalho estava centrado na professora.

10.1 A mesma tarefa implementada, pela mesma professora, proporciona o mesmo tipo de experiência matemática?

A abordagem curricular foi planeada para se desenvolver em torno de sete tarefas. As turmas do 9º A, 9º B e 9º E trabalharam as tarefas referidas. Neste item vamos apresentar como uma mesma tarefa, mediada pela mesma professora proporcionou experiências matemáticas diferentes. Apresentaremos duas situações, situação I e situação II, que permitirão avançar com uma resposta parcial à pergunta colocada neste item. Na situação I, podemos constatar que a existência, ou não, dos recursos relevantes para o desenvolvimento da experiência matemática a pode condicionar substancialmente; do mesmo modo, na situação II, podemos verificar como o grupo de alunos e as respectivas experiências anteriores pode marcar e caracterizar, de diferentes modos, a experiência matemática proporcionada.

Situação I - No caso da Tarefa 1, as turmas do 9º A e 9º B (ver incidente 1 no item 6.1.1.3), onde a generalidade dos alunos não levou transferidor nem régua para a sala de aula, não puderam avaliar e concluir que as razões trigonométricas estavam associadas à invariância do ângulo porque todos os alunos, nos grupos, trabalharam com os mesmos triângulos do manual adoptado ou decalcados do mesmo. No caso do 9º E (ver incidente 1 no item 6.1.1.3), tendo levado material necessário, puderam construir, em cada grupo, dois triângulos rectângulos diferentes com um ângulo de amplitude 60º; a associação das razões trigonométricas à invariância do ângulo foi mais evidente.

Situação II – No caso da Tarefa 4, realizada em grupo em que eram trabalhados conceitos básicos de geometria a partir da construção, com recurso ao *polydron*, de dois modelos de poliedros - um da família dos prismas e outro da família das pirâmides por grupo: as turmas 9º A e 9º B, trabalharam de forma interessada, sem dificuldades em gerir a actividade proporcionada pela tarefa; já no caso da turma do 9º E e nas mesmas condições físicas e logísticas os alunos da turma apresentaram muitas dificuldades em gerir a actividade proporcionada pela tarefa. As turmas do 9º A e 9º B já tinham tomado contacto com o *polydron* em diversas situações, no 7º ano de escolaridade, para trabalhar conceitos geométricos e resolver problemas matemáticos de geometria enquanto que o 9º E (ver incidentes 27 e 28 no item 6.1.4.3) era a primeira vez que tomava contacto com o material manipulável, para o trabalho em sala de aula de matemática, para além do que a turma do 9º E apresentava dificuldades conceptuais no domínio de conceitos geométricos básicos. Acresce que a Tarefa 4 implementada no 9º E, e por influência das conferências com a *critical friend* tinha sempre um poliedro com pelo menos uma face pentagonal: ou pirâmide pentagonal ou prisma pentagonal o que conferiu um grau de dificuldade superior à tarefa.

Nas turmas da professora investigadora apesar das tarefas propostas em sala de aula serem as mesmas nas três turmas as condições de implementação podiam diferir caso os recursos relevantes não estivessem salvaguardados ou caso as turmas possuíssem experiências matemáticas anteriores bastante diferentes. A acrescentar a estas situações deve dizer-se que a professora investigadora, pelas experiências vividas, pela reflexão pessoal sobre as práticas de ensino, pela actividade matemática observada nos alunos e pela reflexão com a *critical friend* nas conferências semanais ia ajustando dinamicamente as tarefas e o modo de actuação no período de implementação de uma dada tarefa. Umas vezes os ajustes funcionavam positivamente como na situação I apresentada acima, mas, outras vezes, as mudanças introduzidas nas práticas de ensino não proporcionavam melhor facilitação nas experiências de aprendizagem matemática, conforme foi relatado na situação II, na turma do 9º E.

10.2 Uma tarefa negociada e elaborada por duas professoras proporciona o mesmo tipo de implementação nas turmas das duas professoras?

Situação III – O caso da Tarefa 3 que foi seleccionada do manual pela professora investigadora e pela *critical friend* e cuja implementação foi preparada pelas duas professoras foi implementada de diferentes modos, tendo proporcionado dinâmicas diferentes nas turmas das duas professoras:

1) o astrolábio foi construído de maneiras diferentes nas turmas das duas professoras;
2) a ficha de registo foi usado pelo grupo nas turmas da professora investigadora (uma só ficha de registo para todo o grupo) enquanto que na turma da *critical friend* foi dada uma ficha de registo por aluno;
3) os dados pessoais recolhidos foram tratados pelo grupo nas turmas da professora investigadora enquanto que na turma da *critical friend* foram tratados pelo autor dos registos;
4) no final, o grupo, nas turmas da professora investigadora, teria de apresentar a altura de um dado objecto previamente seleccionado num relatório que iria ser submetido a avaliação - o que os obrigava a recorrer à média dos valores obtidos como valor melhor representativo da altura do objecto, pois tinham entre 3 a 4 valores diferentes – um por cada aluno do grupo; no caso da *critical friend*, os alunos apesar de estarem fisicamente dispostos em grupo, não trabalharam em grupo e tiveram que aprender a realizar os cálculos individualmente a partir do exemplo que a *critical friend* apresentou no quadro para toda a turma e não houve necessidade de recorrer ao valor médio como melhor representativo da altura do objecto medido porque não tinha existido confrontação de valores entre alunos..

Nesta situação a mesma tarefa seleccionada pela professora investigadora e pela *critical friend* é implementada de maneiras diferentes: a construção dos produtos intermédios (astrolábio), o uso da ficha de registo, o trabalho proporcionado pelos dados recolhidos, a existência ou não de produto final - a ficha/relatório e a forma de trabalho – em grupo ou individual não foram coincidentes na implementação das turmas da professora investigadora e da *critical friend*. De um modo geral podemos afirmar que, nas turmas da professora investigadora, a medição de objectos de alturas inacessíveis com recurso ao astrolábio, Tarefa 3, foi realizada em grupo, e centrada sobre o trabalho dos alunos enquanto na turma da *critical friend* o trabalho na Tarefa 3 foi desenvolvido maioritariamente de forma individual e centrado na professora. Por outro lado, todos os grupos das turmas da professora investigadora mobilizaram o conceito de média para obterem um valor representativo das 3 ou 4 medições diferentes realizadas pelos alunos em cada grupo. Na turma da *critical friend* não houve necessidade de se utilizar o conceito de média porque como o trabalho foi centrado nos dados das medições pessoais de cada aluno e, portanto, não havia disparidades nem confrontações com outras medidas sobre o mesmo objecto em estudo.

10.3 A relação entre as tarefas de aprendizagem planificadas e as experiências de aprendizagem matemática proporcionadas

A importância e centralidade das tarefas no currículo é um aspecto consensual entre os professores de matemática e os educadores matemáticos (Abrantes (1994), Douady e Parzysz (1998), Gimeno-Sacristán (2000), Brocardo (2001), Ponte *et al* (2003), Lopes (2004), Ponte (2005), Fernandes (2005), Lopes *et al.*(2008)). Também se sabe que as tarefas não são *à prova* de professor, isto é, pode acontecer que uma tarefa que foi pensada para ser implementada de uma determinada forma pode ser usada de maneira totalmente diversa e proporcionar aprendizagens matemáticas diversas.

As situações acima apresentadas levam-nos a reflectir sobre a relação entre as tarefas de aprendizagem planificadas e as experiências de aprendizagem matemática proporcionadas. Podemos perceber, então:

- a importância dos recursos relevantes serem ou não disponibilizados e a sua interferência no condicionamento da experiência matemática preconizada – situação I;
- a importância do grupo de alunos, com as respectivas experiências prévias (físicas e conceptuais), a quem vai ser proposta a tarefa – situação II, na exploração das tarefas e nas consequências daí para a actividade e experiência matemáticas desenvolvidas;
- a importância da mediação da aprendizagem realizada pelo professor – situação III que apesar de ter havido preparação conjunta e com negociação de qual a melhor forma de implementar acaba por resultar em formas de implementação e exploração tão diversas.

Em síntese, e dos resultados do presente estudo, podemos afirmar que as experiências de aprendizagem matemática realizadas não têm uma relação pré-determinada com as tarefas planificadas que lhes deram origem. Que as mesmas tarefas, implementadas pelo mesmo professor ou por uma equipa de professores que as negociaram (planificação e implementação) podem dar origem a experiências de aprendizagem matemática diferentes.

11. O papel das conferências com a *critical friend* na gestão curricular

A professora investigadora e a *critical friend* tinham uma história passada marcada por trabalhos e projectos desenvolvidos em parceria noutros contextos pelo que as expectativas estabelecidas eram altas (fundamentavam-se no sucesso anteriormente obtido). A situação vivida nesta abordagem curricular foi marcada pela colaboração em que os papéis da equipa eram simétricos: ambas estavam a leccionar turmas de 9º ano ainda que em escolas diferentes; ambas estavam a implementar as tarefas previamente planificadas e negociadas pelas duas; a professora investigadora também assumiu o papel de *critical friend* da *critical friend*. No entanto neste trabalho de investigação debruçamo-nos apenas sobre as práticas lectivas da professora investigadora. Podemos afirmar que a *critical friend* (o que acontece igualmente com a professora investigadora) transporta consigo, como pessoa e profissional, conhecimentos, competências e formas de compreensão desenvolvidos a diferentes níveis: da escola particular onde trabalha, de outras escolas similares e/ou por onde passou; das questões educacionais relevantes com que se tem confrontado; e dos processos relevantes por que tem passado. Isto é, a *critical friend* é caracterizada por um determinado *background*, por um conjunto de experiências e expectativas e pelas qualidades interpessoais que inevitavelmente marcam e afectam a relação estabelecida com a professora investigadora. Pensar em voz alta, descrevendo as experiências educacionais vividas, reflectindo e problematizando as opções realizadas, identificando angústias e ansiedades vividas nas diferentes situações, isto é, as conferências entre a professora investigadora e a *critical friend*, permitiram alargar os horizontes e partilhar ideias intelectuais, experiências educacionais e conhecimentos profissionais. Assim as conferências tiveram um papel fundamental: (i) na reflexão, (re)organização e monitorização sistemática, e em tempo real, da gestão curricular nas turmas concretas da professora investigadora; (ii) no acompanhamento da evolução e desenvolvimento conceptual dos alunos e grupos na sala de aula; (iii) na confrontação de práticas de ensino concretas e da respectiva problematização com o objectivo da compreensão mais profunda das possíveis razões que a fundamentavam.

i. reflexão, (re)organização e monitorização sistemática

   A reflexão e ajuste da gestão curricular eram feitas regularmente tendo como referência as tarefas planificadas e os *timings* da sua implementação. Como a professora investigadora tinha três turmas as conferências também proporcionaram que houvesse ajustes nos recursos usados (ficha base de trabalho), formas diferentes de implementação para a mesma tarefa; poderia acontecer que uma situação menos favorável pudesse ser corrigida na última turma em que fosse implementada e desenvolvida uma dada tarefa: foi o que aconteceu com a Tarefa 3 na turma do 9º E, por exemplo. A avaliação sistemática da prática e a reflexão a partir das práticas de ensino tornadas públicas a partir do seu relato oral à *critical friend*, nas conferências, permitiram (re)organizar a gestão curricular dentro de cada turma aperfeiçoando a implementação das sequências de ensino planificadas.

ii. acompanhamento da evolução e desenvolvimento conceptual dos alunos e grupos na sala de aula

As conferências também permitiram fazer o relato, indicação ou análise comparativa da evolução conceptual e comportamental de alunos, de situações específicas e/ou grupos (ou do grupo total, a turma). Naturalmente que todos os professores acompanham e têm mais ou menos consciência do desenvolvimento e da evolução dos seus alunos/grupos dentro da sala de aula. Explicitar para uma pessoa externa, a *critical friend*, esses desenvolvimentos obriga a organizar e sistematizar a informação que se possui. A informação devidamente organizada e sistematizada é mais poderosa porque permite aprofundar os conhecimentos adquiridos e actuar de forma mais ajustada e eficiente em situação. Associada a esta reflexão vem associada a auto-crítica e a auto-reflexão do docente. A avaliação formativa realizada de forma contínua e sistemática também permitiu ter um conhecimento melhor e mais aprofundado dos alunos e assim acompanhar mais efectivamente cada aluno e cada grupo de alunos.

iii. confrontação e problematização de práticas de ensino

A professora investigadora e a *critical friend* descreviam as suas experiências de sala de aula. Esta descrição permitia a reflexão sobre a planificação negociada relativamente à extensão e complexidade da tarefa e, em particular o tempo atribuído para a sua realização. O relato pormenorizado em como ocorria, por exemplo, o trabalho de grupo, se eram ou não recolhidos produtos finais da realização das tarefas e o que é que devia constar dos relatórios escritos permitiu perceber a forma como eram operacionalizadas as aulas para uma determinada tarefa eram diferentes (entre a professora investigadora e a *critical friend)*; que a professora investigadora, por norma, recolhia produtos finais escritos sob a forma de relatório para que pudessem ser avaliados e devolvidos aos alunos com *feedback*. A explicitação das práticas permitia que as duas docentes percebessem que aquilo que faziam estava relacionado com lógicas pessoais de docência mais ou menos reflectidas e mais ou menos conscientemente assumidas. As conferências serviam para formular as constatações globais acerca das práticas de ensino de forma organizada, sistematizar as reflexões acerca dos acontecimentos na sala de aula e da sua compreensão em profundidade e problematizar a razão específica de determinadas práticas de ensino.

Que havia entendimentos diferentes para a operacionalização do trabalho de grupo, da pertinência dos alunos produzirem um relatório como produto final das tarefas e até da forma de construção do astrolábio. Os entendimentos diferentes e a sua operacionalização diferente permitiram a cada docente aprofundar e tomar mais consciência das respectivas práticas de ensino porque foram vistas e analisadas de forma diferente por outra pessoa, num clima amigável e de respeito mútuo.

Os três aspectos anteriormente referidos vêm relevar a importância, nesta abordagem curricular e neste trabalho de investigação, do papel da *critical friend*. A abordagem curricular ficou enriquecida pelo papel fundamental, específico, minucioso e problematizador assumido pela *critical friend* porque, num trabalho colaborativo através da cooperação nas diferentes fases do processo educativo (planificação, implementação, avaliação e monitorização) nunca tendo deixado de exercer a crítica construtiva através do questionamento da diferença e da razão de ser de determinadas práticas e da explicitação de práticas de ensino diferentes. O olhar da *critical friend*, focado noutros pontos que não os da professora investigadora, realizado através dos olhos da *critical friend* permitiram desocultar práticas naturalmente específicas da professora investigadora, salientando comparativamente as diferenças relativas às suas práticas e de outras que a *critical friend* conhecia. Ao questionar as diferenças e ao solicitar informação para melhor compreender proporcionou um aprofundamento natural das problemáticas e favoreceu uma compreensão mais profunda, isto é, proporcionou a explicitação das teorias educacionais pessoais da professora investigadora que posteriormente favoreceram a teorização a partir da organização consciente das organizações lógicas obtidas das avaliações sistemáticas da prática com referência aos resultados da investigação educacional.

Em síntese, poderíamos afirmar que as conferências realizadas entre a professora investigadora e a *critical friend* tiveram duas grandes finalidades: a de apoiar a gestão na abordagem curricular e a de desafiar novas práticas de ensino na continuação de experiências que se vinham fazendo ao longo do desenvolvimento profissional da professora investigadora.

PARTE IV- Conclusões e considerações finais

12. Conclusões

Todo o acto de ensino é, também, um acto de aprendizagem: aprender acerca dos alunos, aprender acerca da situação e aprender acerca de si próprio. Este trabalho de investigação é realizado pela mesma pessoa que ensina e é professora das turmas que permitem a investigação em curso. Trata-se, pois, de investigar a própria prática: as práticas de ensino da professora investigadora em geometria. Esta dupla função, de ser professora e investigadora, tem associadas vantagens e dificuldades inerentes a ser professora, inerentes a ser investigadora e inerentes a ser professora investigadora. Pelo facto de ser professora a missão é, sem dúvida, de proporcionar melhores e mais significativas aprendizagens a todos os alunos; pelo facto de ser investigadora é preciso olhar para práticas de ensino como alguém que está de fora de forma a identificar, estudar e aprofundar aspectos que foram seleccionados inicialmente e que foram devidamente formulados através do problema e das questões de investigação. Esta dupla função só é possível e exequível para um conjunto de assuntos que sejam convergentes com as preocupações de quem ensina e de quem investiga para daí se poder rendibilizar e complementar os dois movimentos provenientes das duas funções. O movimento de investigar a própria prática está enraizado na necessidade de mudança do próprio professor para melhor adaptação às exigências sociais de educação de todos os jovens. A mudança não se realiza de ânimo leve e é fundamental perceber e verificar se as mudanças tentadas e concretizadas permitem melhorar as aprendizagens dos alunos e torná-las mais significativas e mobilizáveis no exercício da cidadania crítica e participativa. O conhecimento e a reflexão dos resultados da investigação educacional e, em particular, da investigação em educação matemática a nível nacional e internacional permitem problematizar as práticas de ensino e perceber que há limitações que as enformam e que estão suficientemente documentadas, que há constrangimentos externos à mudança e que é preciso identificar o que é possível ser mudado e o que não pode ser mudado por razões sociais, culturais ou institucionais. É solicitado que o professor de matemática invista em tarefas diversificadas e de naturezas diversas, que implemente instrumentos e estratégias diversificadas de avaliação, que implemente um ensino para o desenvolvimento de competências desde o mais baixo nível (na constelação de reprodução materializadas em tarefas rotineiras que visem essencialmente treino de técnicas, algoritmos e procedimentos) até aos níveis mais elevados (constelação de competências de conexão e de reflexão). O problema de que partimos tem a ver exactamente com a forma de articulação dos esforços sistemáticos realizados e desenvolvidos pelo professor, na sala de aula, para proporcionar aprendizagens significativas a todos os alunos. Centrados nas práticas de ensino em geometria da professora investigadora, foco da investigação em curso, investimos na resposta a quatro questões de investigação:

1. Quais as características da experiência matemática proporcionada e a sua relação com o que os alunos aprenderam?
2. Quais as características da avaliação implementada enquanto processo regulador das aprendizagens?
3. Qual a relação entre as tarefas de aprendizagem planificadas e as experiências de aprendizagem matemática proporcionadas?
4. Qual o papel das conferências com a *critical friend* (no desenvolvimento das experiências matemáticas proporcionadas) na gestão curricular?

12.1 A experiência matemática proporcionada

Ao reflectir sobre a experiência matemática proporcionada poderíamos afirmar que da abordagem curricular implementada não sobressai qualquer metodologia utilizada, quaisquer recursos específicos implementados, quaisquer instrumentos de avaliação específicos, qualquer tipo de tarefa específica…nem tão pouco qualquer forma específica de trabalho. Talvez pudéssemos afirmar, de uma forma superficial, que as práticas de ensino da professora investigadora não se distinguem daquelas que são proporcionadas na generalidade das salas de aula de qualquer professor de matemática. De facto, em qualquer sala de aula da disciplina de matemática poderemos encontrar, pontualmente, trabalho de grupo, uma ou outra tarefa diferente, a resolução de exercícios diversificados podendo existir mesmo uma ou outra vez a produção de algum relatório escrito sobre uma qualquer tarefa proposta e/ou actividade realizada e o recurso a alguns instrumentos de avaliação diferentes do teste e/ou fichas de avaliação. Mas se analisarmos e reflectirmos de forma mais aprofundada sobre as características da experiência proporcionada, na abordagem curricular em foco, podemos aperceber-nos que o que a torna numa proposta fora do comum não são os elementos constituintes das práticas de ensino mas as proporções com que eles marcam a experiência matemática proporcionada, a forma como estão articulados e as dinâmicas que se criaram para mobilizar e induzir o envolvimento disciplinar produtivo nos alunos (Engle e Conant, 2002). Para melhor esclarecer a ideia que se pretende comunicar recorrer-se-á a uma metáfora gastronómica: a regueifa doce e o pão-de-ló são feitos a partir dos mesmos constituintes/ingredientes base – açúcar, farinha e ovos[20]; no entanto as proporções dos ingredientes são diferentes e os doces, como produtos finais têm qualidades diferentes; o mesmo se poderia dizer das diferentes formas de os confeccionar (processos envolvidos - na mistura dos ingredientes, tempo, forma, temperatura, tempo de cozedura, etc.).

Nesta abordagem curricular o trabalho de grupo, sob determinados critérios explicitados e implementados assumiu cerca de 55% do total do tempo de trabalho em sala de aula pelo que foi necessário: i) explicitar considerações acerca da forma como os grupos trabalhavam; ii) apresentar sugestões para os grupos melhorarem a sua forma de trabalho. Ao longo da abordagem curricular os alunos foram ajustando as formas de relação nos grupos centrando-se na actividade matemática proporcionada pelas tarefas propostas. Além disso, o trabalho em grupo foi a forma de trabalho seleccionada para que os alunos pudessem lidar com tarefas que exigiam processos matemáticos mais elaborados e onde o trabalho colaborativo servisse de apoio e vantagem sobre o trabalho individual (para resolver tarefas rotineiras os alunos não eram dispostos em grupo e mantinham-se nas carteiras a pares). Nos grupos foi realizado, para além de um trabalho de projecto sobre rotações, um conjunto de sete tarefas diversificadas (quanto à natureza, quantos aos processos matemáticos mobilizados) criteriosamente seleccionado a partir do qual seriam leccionadas a trigonometria e a geometria do espaço. Estas sete tarefas e o trabalho de projecto foram seleccionadas para, em conjunto, permitirem leccionar os temas em consideração mobilizando os processos cognitivos (construção, visualização e reflexão (Duval, 1998)) e procedimentos fundamentais em geometria de uma forma contextualizada[21]. Em todas as tarefas realizadas havia a produção de um relatório (um

---

[20] Enquanto que para um kilo de regueifa doce são precisos 4 ovos, um kilo de farinha e 375 gramas de açúcar, para um kilo de pão de ló são precisos 12 ovos, um quarto de farinha e meio kilo de açúcar.

[21] o método de tentativa e erro na procura de planificações diferentes de um mesmo poliedro, o método de demonstração, a construção de um tronco de cone com recurso a régua e compasso a partir de uma dada situação problemática, a construção de um dado poliedro com recurso ao *polydron, a* observação, a comparação e a análise para identificar se estavam perante planificações distintas ou perante a mesma planificação, a identificação dos diferentes elementos de um dado poliedro e a adopção de uma forma

produto final, pelo menos) que servia como produto final da actividade de aprendizagem e como instrumento de avaliação do trabalho produzido. Foram produzidos sete relatórios de outras tantas tarefas propostas. Nesta abordagem curricular a avaliação formativa implementada e o *feedback* (oral, escrito e não verbal) foram coerentes com as actividades de aprendizagem e não valiam por si mas constituiram-se como um processo regulador das aprendizagens dos alunos.

As práticas de ensino, a aprendizagem e a avaliação constituíram um ciclo coerente e articulado. A avaliação implementada através de um *feedback* sistemático e deliberado entrou no ciclo do ensino e da aprendizagem (Fernandes, 2005). A integração entre estes três processos permitiu regular as práticas de ensino e a aprendizagem: o uso de tarefas que são simultaneamente para ensinar, aprender, avaliar e contextualizar a avaliação permitiu que houvesse uma relação próxima entre as tarefas de avaliação e as finalidades do ensino. Também houve consistência entre a avaliação, a abordagem curricular e as metodologias e estratégias utilizadas para o desenvolver fazendo coincidir as tarefas de aprendizagem com as tarefas de avaliação (Fernandes, 2005). Nestas circunstâncias a avaliação formativa mais do que promover formas alternativas de avaliação constitui-se, ela mesmo, como parte integrante do processo de aprendizagem e, por isso, uma utilização alternativa da avaliação no acto educativo, isto é, mais do que regular as aprendizagens constitui-se num processo fundamental para melhorar a própria aprendizagem.

A articulação e coerência acima descritas foram viabilizadas pela implementação de dinâmicas específicas que permitiram ir afinando e ajustando o trabalho realizado na abordagem curricular de forma a potenciar e maximizar a aprendizagem de todos os alunos em cada turma causando o mínimo de danos na aprendizagem de cada aluno enquanto indivíduo.

Algumas das características da experiência matemática proporcionada foram: i) a alternância entre o trabalho individual e o trabalho de grupo; ii) o apoio e confiança

---

organizada de fazer a sua contagem, a identificação da hipótese e da tese num determinado teorema e/ou proposição matemática, o desenvolvimento de diferentes formas de organização de dados recolhidos (tabelas, gráficos, determinação da média como o valor mais fiável de um conjunto de dados recolhidos em diferentes momentos ou por diferentes pessoas), a elaboração e raciocínio na visualização mental de rectas e na identificação de posições relativas entre rectas, rectas e planos e entre planos no espaço, a elaboração e precisão conceptual dos conceitos básicos mobilizados na geometria, o estabelecimento de conexões entre diferentes temas da matemática e a geometria, a promoção da reflexão sobre a experiência matemática realizada, o desenvolvimento de um trabalho de projecto nas suas diferentes fases, a comunicação matemática oral, escrita e não verbal do que se pensa e faz, o uso de tecnologia (calculadoras) como ferramenta de trabalho na matemática, o contacto com a simbologia matemática e aprendizagem do seu significado, o contacto com a formalização matemática e a sua sintaxe própria, etc.

constante da professora investigadora a cada aluno e nas suas capacidades combinado com a exigência e responsabilização de cada um pela sua aprendizagem e pela aprendizagem dos restantes elementos do respectivo grupo (envolvimento disciplinar produtivo – (Engle e Conant, 2002)); iii) a diversidade de tarefas de aprendizagem/tarefas de avaliação dando tempo para que os alunos aprendessem a trabalhar de maneira diferente e com lógicas avaliativas concretizadas em práticas avaliativas específicas diversas daquelas a que estavam normalmente sujeitos nas outras disciplinas e na própria matemática.

As estratégias utilizadas, regularmente, para que os alunos desenvolvessem competências no domínio da auto-avaliação, da auto-regulação e auto-controlo foram: i) balanços efectuados no fim de cada período realizando a auto-avaliação à disciplina de matemática; ii) reflexões no início de cada período, já com o conhecimento da avaliação atribuída a todas as disciplinas, sobre a forma de aprender e estudar no período anterior e perspectivando medidas (empenho, atitude, estudo, realização de TPC, etc.) para, no futuro, poderem incrementar uma melhor aprendizagem. Esta prática está de acordo com o que Morgan (2008) refere quando apresenta "*a necessidade de os alunos se avaliarem a eles mesmos e perceberem como melhorar*" como um dos princípios que caracteriza a avaliação que apoia a aprendizagem – um dos princípios apresentados pelo *Centre for Educational Research and Development* – OECD (*Assessment Reform Group*, 1999).

Neste item iremos tentar sistematizar, de forma sintética, a resposta às questões formuladas

1.1 Como é que o professor consegue que os seus alunos se envolvam no trabalho matemático proposto? Quais as características do envolvimento dos alunos na sua aprendizagem matemática?

1.2 De que modos o professor leva os alunos a terem consciência da aprendizagem matemática realizada?

1.3 Como é que os alunos são desafiados a pensar profundamente sobre o que eles estão a aprender?

1.4 Qual o impacte da abordagem curricular concebida no desenvolvimento de competências dos alunos?

12.1.1 Os esforços do professor para envolver os alunos na actividade matemática

O envolvimento dos alunos numa actividade específica e, em particular, na actividade matemática proporcionada num contexto escolar numa sala de aula é um processo complexo. Contudo é fundamental para que a aprendizagem matemática seja significativa. O envolvimento activo dos alunos no nosso estudo revelou-se a partir das próprias tarefas propostas (8.2.1 i)), do trabalho de grupo onde estavam inseridos (8.2.1 ii)), da mobilização do grupo como uma equipa (8.2.1 iii)), da intervenção dos pais e encarregados de educação solicitada pelo professor (8.2.1 iv)). Contudo poderá acontecer que haja alunos que não queiram deixar-se envolver (8.2.1 v)).

Os resultados do nosso estudo (apresentados na secção 8.2 do capítulo 8) mostram que para um professor de matemática desenvolver estratégias que promovam o envolvimento dos seus alunos, de forma activa, na aprendizagem matemática são necessários os seguintes requisitos:

1) Promover o envolvimento consciente e voluntário dos seus alunos explicitando as vantagens do envolvimento na aprendizagem matemática e esclarecendo que só aprende quem quer (e por vezes quem quer pode ter dificuldades de aprender). Esperar que os alunos se envolvam em resultado de um movimento próprio e intrínseco pode resultar no alheamento e/ou na desistência do investimento na sua aprendizagem.
2) Proporcionar o trabalho não só individual mas também colaborativo na corresponsabilidade pelos seus pares para se lidar com a complexidade inerente à tarefa e/ou aos procedimentos nela envolvidos.

   Não proporcionar o trabalho de grupo dentro da sala de aula de matemática pode induzir que a aprendizagem matemática seja vista como um processo solitário não permitindo que os alunos possam contactar e aprender a respeitar formas específicas de raciocínio matemático e da respectiva aprendizagem.
3) Expor os seus alunos perante uma diversidade de tipos de trabalhos matemáticos mobilizando recursos[22] estruturantes fundamentais e processos e procedimentos

[22] Recursos, no sentido dado por Engle e Conant (2002), englobam recursos físicos (materiais manipuláveis, manual, livros, concretos e/ou tecnológicos-calculadoras e computadores), o tempo, condições várias, o espaço, etc.

matemáticos diversos como uma forma de melhor preparação para o exercício da cidadania crítica actual e futura.

Investir apenas num ou noutro tipo de tarefas, tipo de processos e/ou procedimentos por melhor que seja a sua qualidade acabará por não proporcionar uma aprendizagem adequada e completa aos alunos: veja-se, por exemplo, o ensino da matemática centrado sobre os Elementos de Euclides e que estava polarizado pelo método demonstrativo ou o ensino durante a era da Matemática Moderna.

4) Induzir processos metacognitivos nos seus alunos através da realização de balanços sistemáticos de forma a avaliar se o respectivo envolvimento tem sido adequado nas medidas, na quantidade de trabalho, na atitude ajustada aos diferentes momentos vivenciados na sala de aula para salvaguardar o sucesso de cada aluno na aprendizagem da respectiva disciplina e/ou na passagem de ano de escolaridade.

Estes requisitos são uma forma de operacionalizar: i) as recomendações do relatório "Matemática 2001" (APM, 1998) onde se explicita "*que a prática pedagógica deve utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados e a utilização de materiais que proporcionem o envolvimento dos alunos na aprendizagem, nomeadamente os manipuláveis entre outros*"; ii) o conceito de *envolvimento disciplinar produtivo* apresentado por Engle e Conant (2002) (ver 8.2.3 do capítulo 8); iii) o princípio do envolvimento activo dos alunos na aprendizagem como um dos princípios da avaliação formativa referidos por Morgan (2008), na conferência proferida no Seminário da SEM-SPCE[23]; iv) o princípio da Matemática para todos uma vez que "*todas as pessoas necessitam conhecer e compreender matemática*" e, por isso, "*todos os alunos devem ter a oportunidade e o apoio necessário para aprender matemática com significado, com profundidade e compreensão*" não existindo conflitualidade entre equidade e excelência (APM, 2007: 5).

[23] SEM-SPCE – Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

12.1.2 Modos do professor levar os alunos a terem consciência das aprendizagens realizadas

A consciência das aprendizagens realizadas estabelece uma fronteira entre aquilo que já se sabe e o que falta aprender. Os resultados do nosso estudo (apresentados na secção 8.3 do capítulo 8) mostram que um professor pode proporcionar que os alunos tenham consciência das aprendizagens realizadas e invistam mais direccionadamente nas aprendizagens de matemática em falta se desenvolver:

1) estratégias para levar os alunos a terem consciência das aprendizagens realizadas e a explicitá-las de forma escrita ou oral;
2) competências no domínio da auto-avaliação, auto-regulação e de auto-controlo no sentido de fomentar a autonomia dos alunos no processo de aprendizagem,

Esse autoconhecimento explicitado terá utilidade para o aluno para poder monitorizar a sua aprendizagem e para o professor para poder, em tempo útil, ajustar o trabalho a realizar de forma a ir de encontro às dificuldades identificadas dos alunos e maximizar a aprendizagem proporcionada. Neste âmbito também se reveste de extrema importância espaços, na sala de aula, para a formulação de perguntas acerca dos conteúdos matemáticos[24] já trabalhados e proporcionar a distinção entre os processos de ensino e de aprendizagem em que os alunos normalmente apresentam confusão conceptual. A consciência dos alunos sobre as aprendizagens realizadas foi proporcionada pela implementação do instrumento Listagem Dinâmica de Perguntas onde os alunos puderam registar questões dos conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula.

12.1.3 Modos de desafiar os alunos a pensarem profundamente sobre o que estão a aprender

Os resultados do nosso estudo (apresentados na secção 8.4 do capítulo 8) mostram que os alunos são desafiados a pensar profundamente sobre o que estão a aprender se um professor de matemática: i) proporcionar tarefas (ou um conjunto de tarefas) que mobilizem múltiplos métodos complexos (onde estejam processos de generalização, de reflexão e de *insight*, de resolução de situações problemáticas complexas), com recurso a materiais manipuláveis e/ou didácticos como forma de construção de conceitos e/ou de formalização matemática; ii) promover a comunicação oral entre pares, no grupo turma

[24] Por conteúdo matemático pretende-se significar não só conceitos, estruturas e ideias matemáticas mas também processos, contexto de uso e/ou de produção da matemática.

com o professor (a partir de problemas desafiadores e da colocação de questões pertinentes) e a comunicação escrita através de relatórios, composições e/ou redacções.

Proporcionar uma abordagem curricular com tarefas criteriosamente seleccionadas, recorrendo a materiais manipuláveis e/ou tecnológicos é importante mas poderá não ser suficiente para proporcionar aprendizagens significativas. Tão ou mais importante que a actividade matemática desenvolvida é a reflexão que se deve proporcionar sobre essa actividade.

Vale (2003) defende que os materiais manipuláveis e/ou didácticos não são importantes como um fim em si mesmo mas na medida em que através do sentir, tocar, manipular e movimentar, numa série de tentativas, podem permitir descobrir relações, propriedades facilitando o movimento cognitivo do concreto para o abstracto. Com efeito, a nossa investigação mostrou que os materiais manipuláveis permitiram que os alunos ao desenharem, medirem, visualizarem, compararem, transformarem e classificarem, entre outras acções, pudessem descobrir relações, desenvolver o sentido espacial e o raciocínio de forma a fomentar a aprendizagem de ideias abstractas. Todavia um professor não pode deixar de desafiar os alunos a pensar profundamente sobre as aprendizagens realizadas através da comunicação estabelecida na sala de aula quer entre pares no grupo de trabalho, quer perante o grupo turma apresentando e defendendo as suas posições e/ou as do respectivo grupo.

Outra forma de desafiar os alunos a pensarem profundamente sobre as aprendizagens realizadas foi promover a elaboração de relatórios escritos onde apresentaram os resultados e conclusões da actividade matemática realizada. Escrever sobre a actividade e/ou reflexões realizadas obriga a organizar a informação, pensamentos e conclusões de forma a serem legíveis e compreensíveis para outras pessoas e, de alguma forma, a aprofundar as relações, as conexões e os conceitos mobilizados.

Elaborar um relatório para um aluno não é tarefa fácil e, possivelmente não se consegue organizar um relatório, composição e/ou redacção da primeira vez. Também não o é para um professor que nunca elaborou um relatório na disciplina de matemática. Normalmente os professores acompanham pedagogicamente uma turma ao longo de um ciclo de ensino e é possível ir aprendendo com o que se pretende de um relatório, de uma composição e/ou de uma redacção quanto à estrutura, quanto ao conteúdo, quanto aos itens a constar no seu desenvolvimento (pela consulta da investigação educacional realizada a partir de estudos empíricos em contexto de sala de aula, pela formação adquirida, pela experiência que se vai acumulando e pelo trabalho colaborativo realizado com os profissionais da mesma escola e/ou de outras escolas). O que é sensato esperar é que no fim de um dado ciclo de ensino é que os alunos já tenham mais à vontade e saibam o que significa elaborar um dado relatório, composição e/ou redacção (o mesmo se dirá de um professor que se aventurou no investimento do desenvolvimento do aprofundar o pensar através da elaboração de relatórios).

12.1.4 Impacte no desenvolvimento de competências

Os resultados do nosso estudo (apresentados na secção 8.5 do capítulo 8) mostram que nas turmas da professora investigadora, 9º A, 9º B e 9º E, se desenvolveram competências das constelações de conexão[25] e de reflexão[26] (que correspondem às competências de nível mais elevado) confirmados pelos ganhos normalizados positivos, enquanto que nas turmas do 9º D e do 9º F se constatou que houve ganhos normalizados negativos nessas duas constelações (de conexão e de reflexão). No que se refere às competências da constelação de reprodução[27] não houve diferenças significativas entre as cinco turmas da Escola A. O desenvolvimento de competências na abordagem curricular foi promovido e proporcionado pelas práticas de ensino, foco da investigação educacional em curso, que proporcionaram experiências de aprendizagem significativas. Assim, e fundamentados nos resultados do nosso estudo, o desenvolvimento de competências de alto nível realiza-se pela participação activa dos alunos, através das suas próprias explorações e produções, em experiências de aprendizagem significativas e tornadas conscientes e consistentes pela reflexão proporcionada pela experiência matemática e organizada e sistematizada pela comunicação matemática (oral na discussão entre os alunos e com o professor e escrita através da produção de registos com recurso à escrita – relatórios, cartazes, portefólios, composições, *power-points*, acetatos, etc.).

O impacte desta abordagem curricular pode constatar-se no desenvolvimento de competências produzido e proporcionado conforme foi apresentado no capítulo 7. De um modo geral o ensino tradicional desenvolve competências de baixo nível, na constelação de reprodução, correspondendo ao conhecimento e uso de representações e definições estandardizadas, a cálculos de rotina, procedimentos de rotina e a resolução de problemas de rotina. As competências de nível mais elevado e agrupadas na constelação de conexão

[25] Constelação de conexão conforme categorização do PISA (ME, 2004a: 34), apresentada na Tabela 3.1.
[26] Constelação de reflexão conforme categorização do PISA (ME, 2004a: 34), apresentada na Tabela 3.1.
[27] Constelação de reprodução conforme categorização do PISA (ME, 2004a: 34), apresentada na Tabela 3.1.

(modelação, tradução e interpretação de resolução de problemas estandardizados, múltiplos métodos bem definidos) e na constelação de reflexão (colocação de problemas complexos, reflexão e *insight*, abordagem matemática original, múltiplos métodos complexos, generalização, demonstração) são melhor desenvolvidas por tarefas centradas em situações problemáticas que mobilizem os processos aí categorizados. O desenvolvimento de competências não é realizado de forma directa e linear. Poderemos afirmar, baseados na investigação em curso, que um ensino que proporcione uma experiência matemática significativa (em que o ensino, aprendizagem e avaliação formativa estejam articulados de forma coerente) em que o professor mobilize e induza o envolvimento efectivo, fomente a consciencialização das aprendizagens e promova o pensar profundamente sobre as aprendizagens realizadas pode levar ao desenvolvimento de competências de reprodução, de conexão e de reflexão, isto é, desde os níveis mais baixos até aos níveis mais exigentes e mais elevados.

12.2 A avaliação implementada

A avaliação formativa enquanto processo regulador das aprendizagens revelou-se como um processo estritamente essencial na aprendizagem dos alunos. O *feedback* sistemático e deliberado sobre o conteúdo matemático e sobre as formas de trabalho desenvolvidas proporcionou que a professora partilhasse o seu poder de avaliadora e pudesse *"contribuir para que os alunos, sempre apoiados* [pela professora investigadora] *se tornassem mais autónomos para avaliarem e regularem os seus desempenhos e para encontrarem maneira de os melhorar*" (Fernandes, 2005: 85). De facto, houve uma adequada integração entre os processos de ensino, de aprendizagem e de avaliação através de uma articulação coerente dos três processos. Os alunos também identificaram a diversidade de modos e instrumentos usados na sua avaliação e a pertinência para a sua aprendizagem em coerência com a diversidade de tarefas, de recursos mobilizados e de formas de trabalho (resultados já referidos no capítulo 8) através da resposta ao questionário sobre o ensino, da avaliação e do modo de estudar dos alunos - QEAME.

Nesta abordagem curricular as práticas avaliativas em contexto constituíram "*uma rotina na actividade de sala da aula*" (APM, 2007: 24) e são descritas através das formas específicas de avaliação formativa no trabalho de projecto e em tarefas diversificadas e as respectivas características "*recolhendo evidências de fontes diversas*" (APM, 2007: 26).

Tão importante como a avaliação formativa sobre o conteúdo matemático em questão foi fundamental a avaliação sobre a forma de trabalho de grupo dos alunos.

Parece-nos que a avaliação implementada em sala de aula está de acordo com os princípios (obtidos de estudos de investigação) que caracterizam a avaliação formativa que apoia a aprendizagem *(Centre for Educational Research and Development* (OECD) (2005)), a saber:

- *a provisão de feedback eficaz aos alunos;*
- *o envolvimento activo dos alunos na aprendizagem deles;*
- *a adaptação do ensino conforme os resultados da avaliação;*
- *o reconhecimento da influência profunda da avaliação na motivação e no respeito de si mesmo;*
- *a necessidade de os alunos se avaliarem a eles mesmos e perceberem como melhorar* (Morgan, 2008: 53).

O *feedback* disponibilizado pela professora investigadora aos alunos nas suas diferentes formas (escrito, oral e não verbal), quer fosse avaliativo e/ou descritivo, foi, desde início, essencial para que os alunos, que assim o desejavam, melhorassem a aprendizagem. Para alguns alunos, em que a aprendizagem não era prioritária e/ou tinham outros centros de interesse e distracção, a avaliação formativa funcionava como um alerta que poderia chegar inclusive a mobilizar os pais e encarregados de educação no sentido destes exercerem a influência e autoridade no sentido de apoiarem os filhos e/ou educandos nas respectivas aprendizagens.

12.3 Relação entre as tarefas planificadas e as experiências de aprendizagem proporcionadas

As tarefas planificadas e que estruturavam a abordagem curricular em foco foram todas implementadas à excepção de duas: a que tratava a relação de Euler (na planificação Tarefa G3 - Prismas e pirâmides – ver pp. 90) a partir de trabalho experimental com recurso ao *polydron* e a que introduzia a demonstração matemática a partir do recurso ao *software* de geometria dinâmica, *Geometer's Sketchpad* (na planificação Tarefa G5 - Lugares geométricos – ver pp. 93).

Os resultados do nosso estudo (ver capítulo 10) indiciam que não há uma relação pré-determinada entre as tarefas planificadas e as experiências de aprendizagem proporcionadas: o mesmo professor, implementando a mesma tarefa, pode proporcionar experiências de aprendizagem diferentes; dois professores planeando e negociando as condições de implementação de uma dada tarefa podem proporcionar experiências de aprendizagem diferentes. Daqui poderemos inferir que a tarefa, por si só, não induz qualquer tipo de experiência matemática: trata-se de uma ferramenta educacional fundamental, sem dúvida. O que se faz com essa ferramenta, as condições com que se implementa, a mediação que é promovida nas aprendizagens por ela proporcionadas através da actividade matemática realizada é um *out put* bastante variável.

Abrantes[28] (1994: 609) e Brocardo[29] (2001: 580) preconizam nos seus trabalhos de doutoramento que o professor deve ter uma função de desenvolvedor de currículo. De facto este estudo centra-se em cerca de dois meses do final de um ciclo de três anos e no final de um ano de escolaridade: parte do terceiro período do 9º ano de escolaridade de turmas que tinham como professora de matemática a professora investigadora há, pelo menos, dois anos. As mudanças educativas nas práticas de ensino da professora investigadora vinham sendo experimentadas com os alunos desde o 7º ano de escolaridade tal como é referido no contexto precursor. As mudanças graduais e integradas nas práticas de ensino da professora investigadora foram: i) a evolução e o refinamento na implementação do trabalho de grupo; ii) a aprendizagem de quais as referências fundamentais num dado relatório; iii) o à vontade no trabalho e uso dos materiais manipuláveis com o intuito de proporcionar reflexões mais aprofundadas, construção de novos conceitos através dum maior envolvimento dos alunos; iv) a sabedoria, a confiança e a paciência com que aguardava as evoluções proporcionadas nos alunos com este tipo de trabalho. A professora investigadora ganhou confiança neste tipo de abordagem curricular porque houve um período de tempo, bastante alargado, em que pode experimentar as mudanças graduais com os alunos dando-lhes sempre a indicação que o processo seria lento e que serviria para os alunos e a professora se adaptarem às novas exigências das mudanças preconizadas.

No entanto a professora investigadora não só assumiu uma função de desenvolvedora de currículo mas essencialmente de mediadora da aprendizagem dos alunos no sentido em

[28] "*Desenvolver significa que o currículo é construído na interacção das referências e perspectivas iniciais com a prática, através de um processo que implica observação, reflexão e discussão e que passa por sucessivos refinamentos não só das propostas e dos materiais de trabalho mas também das próprias concepções teóricas*" (Abrantes, 1994: 609).

[29] "*O professor não pode ser um mero consumidor de um produto acabado* [currículo], *devendo, pelo contrário, participar activamente no seu desenvolvimento. Este, por sua vez, não pode ser feito em abstracto, necessitando de integrar as características particulares dos alunos para encontrar caminhos que se mostrem mais adequados à sua experiência e que facilitem a sua evolução*" (Brocardo, 2001: 580).

que "*interagiu com os alunos com base no conhecimento deles tentando orientá-los para níveis mais elevados do conhecimento, compreensão e competência; encorajou os alunos nas tarefas, incentivando-os a persistir e a alcançar níveis de conhecimento, compreensão e competência mais elevados; procurou abordagens que [fizessem] sentido para os alunos e colocando-os em situação de terem de os usar ora* [comunicando]*, ora calculando ora agindo; recolheu informação sistemática, de modo informal sobre as aprendizagens efectuadas para poder utilizar na interacção com os alunos; reconheceu aos alunos o seu estatuto epistemológico de sujeitos epistémicos, ou seja admitir que os alunos podem aprender coisas diferentes daquelas que os professores ensinam porque são eles os sujeitos da aprendizagem*"(Lopes, 2004: 385).

12.4 O papel das conferências com a critical friend

As conferências[30]entre a professora investigadora e a *critical friend* (Costa e Kallick, 1993) foram um espaço de encontro face a face onde a professora investigadora descrevia as suas práticas de ensino e os incidentes[31](Mason, 2002) que tinham ocorrido. Por sua vez, a *critical friend*, exercendo uma escuta activa, colocava questões no sentido de esclarecer a prática descrita e o contexto em que tinha ocorrido, providenciava *feedback* acerca do que considerava significativo nas práticas de ensino e criticava construtivamente o trabalho realizado apresentando perspectivas diferentes acerca do objecto da conferência.

As conferências promoveram a reflexão, (re)organização e monitorização sistemática da gestão na abordagem curricular, o acompanhamento da evolução e desenvolvimento conceptual dos alunos e grupos na sala de aula e a confrontação de práticas de ensino concretas da professora investigadora. O olhar problematizador, crítico e amigo da *critical friend* nas conferências (gravadas e transcritas), pôde proporcionar um olhar externo sobre as práticas de ensino da professora investigadora que foram *tornadas* públicas a partir do momento que foram explicitadas e partilhadas. A *critical friend* como uma pessoa marcada por outros referentes (teóricos e práticos) diferentes da professora investigadora, outras

[30] As conferências assumem importância porque, segundo Costa e Kallick (1993) é "apenas quando se muda de lentes a partir das quais se vê a aprendizagem do aluno – ou a própria prática – que se descobre se uma nova focagem é melhor ou pior - o facto de nunca se mudar de lentes pode limitar a visão.

[31] Incidente - no contexto da educação, o principal objecto de estudo são os incidentes na sala de aula, os momentos críticos onde alguma coisa muda, ou uma decisão é tomada quer seja pelo professor quer pelo(s) aluno(s). A atenção pode ser focada no professor, nos alunos, ou no conteúdo matemático, ou nas tensões que possam existir entre cada par ou nas interacções entre os três, na influência do ambiente educativo e nas actividades nas quais um ou mais estão envolvidos.

vivências e por uma história profissional particular ajudou a explicitar o que as práticas da professora investigadora possuíam de específico e de particular, isto é, permitiu desocultar práticas de ensino específicas da professora investigadora e, de acordo com Meaney, Lange & Valero (2009), promover o desenvolvimento profissional através da tomada de consciência acerca do que os professores já sabem e já fazem.

12.4.1 A equipa professora investigadora e a *critical friend*

Abrantes (1994) e Brocardo (2001) sublinham a importância do trabalho de equipa entre investigadores e professores onde haja interacção entre a teoria e a prática onde os níveis de partilha dos saberes e saberes fazer específicos possam actuar de forma a que as práticas de ensino e de investigação concorram e potenciem maiores e melhores formas de aprendizagem nos alunos. Assim a professora investigadora e a *critical friend* constituíram uma equipa onde não havia distinção de funções nem papéis enquanto professoras: no planeamento da abordagem curricular, na elaboração dos diversos instrumentos de recolha de dados, na elaboração das tarefas, na reflexão sobre as práticas de ensino de cada uma delas e das duas em contraposição com o que é tradicional no ensino da matemática. O trabalho de equipa foi sempre orientado pela finalidade de proporcionar uma abordagem curricular, na trigonometria e na geometria no espaço, de acordo com as orientações e princípios curriculares vigentes, agradável, desafiante e que proporcionasse aprendizagens significativas aos alunos. Ambas eram professoras do 9º ano de escolaridade, em escolas do Norte do país, em Trás-os-Montes, o manual adoptado coincidia e os materiais manipuláveis e recursos logísticos estavam igualmente acessíveis às duas professoras, participavam em projectos comuns, partilhavam preocupações e anseios relativamente ao ensino da matemática e tinham como objectivo proporcionar aprendizagens significativas na matemática e, em especial, na geometria aos respectivos alunos. Todo o trabalho realizado tinha como pressuposto que seria para ser viabilizado e implementado pelas duas professoras, cada uma nas suas turmas. Tal como preconiza Swaffield (2005) a operacionalização do trabalho conjunto entre a professora investigadora e a *critical friend,* em particular na gestão curricular das suas turmas de 9º ano, fundou-se: i) na confiança mútua; ii) na partilha de valores e propósitos educacionais (educação, ensino, aprendizagem, necessidades dos alunos e necessidades das pessoas, entre outros); iii) nas qualidades pessoais enquanto profissionais da educação (respeito, honestidade, sensibilidade e empatia); iv) na comunicação presencial e através de mail. O trabalho colaborativo entre a professora investigadora e a *critical friend* permitiu, para além de planear, implementar e reflectir sobre as práticas de ensino, questionar actuações, problematizar procedimentos, aprofundar as razões implícitas da acção educativa e, em tempo útil, ajustar os enunciados das tarefas, as fichas de recolha de dados e a forma de acção específica com cada turma, isto é, fazer a gestão curricular de uma forma dinâmica e em tempo útil às situações e dificuldades com que se deparavam.

13. Limitações do estudo e recomendações para trabalhos futuros

O trabalho aqui apresentado centra-se na investigação das próprias práticas de ensino da professora investigadora. Investigar as próprias práticas de ensino tem associado limitações e vantagens. As limitações decorrem da dificuldade da investigadora se distanciar de si própria e se poder observar como alguém que está de fora. Este movimento e distanciamento foram conseguidos pela implementação de instrumentos de recolha de dados com determinados fins específicos, o questionário acerca do ensino, da avaliação e do modo de estudo dos alunos, QEAME e os testes de competências, e pela presença crítica e reflexiva, nas diferentes fases da abordagem curricular, da *critical friend*.

A vantagem associada a este tipo de investigação é que o investigador é o próprio professor estando na posse das razões das escolhas, das decisões, das razões de determinada escolha realizada pelo professor; conhece os alunos que estão a ser sujeitos da própria investigação e o contexto educativo em que estão inseridos. Este tipo de estudos permite fazer convergir numa só pessoa as funções de professor e investigador: é relevante para professores, práticos reflexivos, que pretendem desenvolver-se profissionalmente ou que pretendem estudar as próprias decisões e escolhas realizadas no sentido de melhorar as suas práticas no futuro; é importante para o investigador no sentido de se desenvolver pessoal e profissionalmente no sentido de ser mais sensível aos outros e ser-lhes mais prestável na sua própria investigação. Tornando-se melhor ou mais atento à própria experiência será mais fácil identificar traços e características específicas e estar por dentro da experiência dos outros (Mason, 2002).

Em termos da investigação educacional em geral e em Didáctica da Matemática em particular não há tradição de se fazerem estudos de investigação educacional holísticos sobre as práticas de ensino do próprio. Esta abordagem curricular não pretendeu eleger nenhum aspecto em especial para ser estudado; pretendeu-se, sim, fazer um exercício de estudo global sobre as práticas de ensino que se pretendem desafiantes, atractivas e significativas para os alunos envolvendo diversidade de tarefas, de recursos, de estratégias de envolvimento e de responsabilização dos alunos, de instrumentos e modos de avaliação formativa e mobilizando a comunicação e o desenvolvimento do raciocínio matemáticos.

De facto, na sala de aula, tem de haver um ensino orientado para proporcionar uma experiência matemática diversificada e significativa para os alunos de forma a dotá-los não só de conhecimentos e procedimentos mas de competências que os apetrechem para saberem estar e ser na sociedade.

O nosso estudo é um contributo para a descrição, análise e interpretação detalhada de ambientes de ensino, aprendizagem e avaliação das salas de aula. (e.g. Fernandes, 2009). Em particular o nosso estudo permitiu esclarecer que mais do que optar por um conjunto da tarefas, por uma forma específica de trabalho, pelo recurso a materiais manipuláveis/tecnológicos, por modos e/ou instrumentos diversificados de avaliação foi contribuir para a necessidade de haver mais estudos investigacionais empíricos em sala de aula que especifiquem noutros contextos de ensino, de aprendizagem e de avaliação e com outros conteúdos matemáticos: i) como as tarefas são implementadas, com que critérios, em que condições, sob que regras; ii) como é que o trabalho de grupo é organizado, dinamizado e sob que princípios; iii) como é que os materiais manipuláveis/tecnológicos e outros recursos são integrados, e facilitam/permitem a experimentação, a construção conceptual, a formalização de raciocínios e o desenvolvimento dos processos cognitivos; iv) como é que os modos e instrumentos diversificados de avaliação permitem regular e apoiar as aprendizagens pretendidas e fornecer informações úteis quer para professores quer para os alunos; v) qual o ambiente de aprendizagem que contextualiza a aprendizagem dos alunos em sala de aula; vi) que estratégias foram implementadas e desenvolvidas para despoletar/consolidar diferentes graus de autonomia dos alunos.

Os professores de matemática assim como os professores de ciências (Costa, Marques & Kempa, 2000) pouco conhecem da investigação educacional e as suas práticas mantêm-se praticamente inalteradas e são pouco elucidadas/influenciadas pelos resultados aí obtidos. Uma parte dos resultados da investigação educacional referem-se a estudos que se organizaram sob condições especiais e num formato excepcional, isto é, com recursos logísticos que a generalidade das escolas não possuem, com mais recursos humanos que o normal e proporcionando, assim, contextos educativos fora do usual o que leva os professores a não investir nesse tipo de práticas. Investir na investigação de contextos educativos em situação equiparada às salas de aula normais e identificar práticas bem sucedidas explicitando o(s) factor(es), condições, ambientes que lhes permitem proporcionar aprendizagens significativas pode ser uma boa forma de induzir e influenciar as práticas de ensino.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática* (tese de doutoramento). Lisboa: APM

Abrantes, P.; Leal, L.; Ponte, J. (1996). *Investigar para aprender matemática*. Lisboa: APM

Abrantes, P.; Ponte, J.; Fonseca, H.; Brunheira, L. (1999). *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: APM.

Almeida, M. (2002). *Imagens sobre o ensino e aprendizagem da estatística*. Lisboa: IIE.

Almiro, J. (2005) Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática in APM (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM

APM (1988). *Renovação do currículo de matemática*. Lisboa: APM

APM (1998). *Matemática 2001 – diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: APM

APM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM

Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro In J. Mª Goñi (Coord.) *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graö

Atiyah, M. (1982). What is geometry? In Chris Pritchard (Ed.) *The changing shape of geometry and geometry teaching*, pp 24-29. London: Cambridge University Press

Ausubel, D. (1980) *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Editora Interamericana

Azcárate, P. (2005). El profesor de matemáticas ante el cambio educativo: una visón desde la complejidad In *V CIBEM*, pp. 133-153. APM: Porto

Barrère, A. (1996). *O trabalho dos alunos*. Porto: RÉS – Editora, Lda.

Baruk, S. (1996). *Insucesso e matemáticas*. Lisboa: Relógio D'Água Editores.

Berthelot, R.; Salin, M. (1998) The role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry In Mammana & Villani (Eds) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century,* pp.71-77. London: Kluwer Academic Publishers

Black, Paul e Wiliam, Dylan (1998). *Inside the black box: Raising standards through classroom assessment*. www.pdkintl.org/kappan/kbla9810.htm. (2008/11/06)

Bogdan, R.; Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação – uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Booth, T.; Swann, W.; Masterton, M; Potts, P. (1995). *Curricula for diversity in education: learning for all I*. London: Routledge and Open University.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano* (Tese doutoramento). Lisboa: APM

Brun, J. (1996). Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques, In Jean Brun (Org.) *Didactique des mathématiques*, pp. 19-43. Paris: Delachaux et niestlé

Bussi, M. & Boero, P. (1998). Teaching and learning geometry in contexts In Mammana &Villani (Ed.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century- an ICMI study*, pp. 53-62. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Cachapuz, A.; Praia, J.; Jorge, M. (2002). *Ciência, educação em ciência e ensino em ciências*. Lisboa: ME.

Canavarro, A.; Ponte, J. (2005). O papel do professor no currículo de Matemática in APM (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM

Caria, T. (2000). *A cultura profissional dos professores – o uso do conhecimento em contexto de trabalho na conjuntura da reforma educativa dos anos 90* (Tese de doutoramento). Lisboa: FCG e FCT

Castelló, M.; Monereo, C.; Gomez, I. (2009). Las competências de los alumnos y su evaluación In Monereo, C. (Coord.) *PISA como excusa repensar la evaluación para cambiar la enseñanza*.pp: 33-53 Barcelona: Graö

Chamoso, J.; Rawson, W. (2004). *Contando la geometría*. Madrid: Nívola – libros y ediciones, S. L.

Cohen, L.; Manion, L.; Morrison, K. (2000). *Research methods in education*. New York: Routledge Falmer

Cook, S.; Brown, J. (1999). Bridging epistemologies: the generative dance between organizational knowledge and organizational knowing In *Organization science*, vol 10, nº 4, pp. 381-400

Costa, A.; Kallick, B. (1993). Through the lens of a critical friend In *Educational Leadership,* 51(2), pp. 49-51

Costa, M. (1994). *Ensinar geometria no 3º ciclo do ensino básico* (tese de mestrado). Lisboa: APM.

Costa, N.; Marques, L.; Kempa, R. (2000). Science teachers' awareness of findings from education research in *Research in Science & Technological Education*, vol. 18, nº 1, pp. 37-44

Costa, N. (2004). A investigação educacional e o seu impacte nas práticas educativas: o caso da investigação em didáctica das ciências – Conferência proferida in *Cultura, Conhecimento e Identidade.* Disciplina do programa de Doutoramento com Base Curricular em Didáctica – Universidade de Aveiro

Cravino, J. (2005). *Ensino da física geral nas universidades públicas portuguesas e sua relação com o sucesso escolar – caracterização do problema e desenho, implementação e avaliação de uma intervenção didáctica* (Tese de doutoramento). Vila Real: UTAD

Damásio, A. (2003). *Ao encontro de Espinosa – as emoções sociais e a neurologia do sentir*. Cascais: Publicações Europa-América.

Davis, P.; Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva

Delors, J. (2005). *A educação para o século XXI – questões e perspectivas*. São Paulo: Artmed

Donlan, C. (1998). *The development of mathematical skills – studies in developmental psychology*. United Kingdom: Psychology Press, Ltd.

Douady, R., Parzysz, B. (1998). Geometry in the classroom In Mammana & Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century – an ICMI study*, pp.159-192. London: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view In Mammana & Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century- an ICMI study*, pp. 37-52. London: Kluwer Academic Publishers

Dyson, F. (1998). *Mundos imaginados*. Lisboa: Gradiva

Elias, M.; Tobias, S.; Friedlander, B. (2001). *Educar adolescents con inteligencia emocional*. Barcelona: Plaza & Janés Editores, S. A.

Engle, R.; Conant, F. (2002). Guiding principles for fostering productive disciplinary engagement: explaining an emergent argument in a community of learners classroom In *Cognition and instruction*, 20(4), pp. 399-483, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Ernest, P. (1994). *Mathematics, education and philosophy: an international perspective*. London: The Falmer Press.

Ernest, P. (1995). *The philosophy of mathematics education*. London: The Falmer Press.

Ernest, P. (1996). *Constructing mathematical knowledge: epistemology and mathematical education*. London: The Falmer Press.

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das aprendizagens: desafios às teorias, práticas e políticas*. Lisboa: Texto Editores

Fernandes, D. (2009). Avaliação das aprendizagens em Portugal: investigação e teoria da actividade. *Sísifo. Revista de Ciências da Educação*, 09, pp. 87-100 consultado em Agosto de 2009 em http://sisifo.fpce.ul.pt

Fonseca, H. (2000) *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula (*Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Fonseca, M. (2002). *Educação matemática de jovens e adultos – especificidades, desafios e contribuições*. Belo Horizonte: a. Autêntica

Gannicott, K.; Throsby, D. (2005) Qualidade da educação e eficácia do ensino escolar In Jacques Delors (Org.) *A Educação para o século XXI, questões e perspectivas*. pp. 160-171. Brasil: Artmed

George, J.; Cowan, J. (1999). *A Handbook of Techniques for Formative Evaluation*. London: Koogan Page

Geraldi, J. (2004). *A aula como acontecimento*. Aveiro: Universidade de Aveiro

Giménez, J.; Santos, L.; Ponte, J. (2004). *La actividad matemática en el aula – homenaje a Paulo Abrantes*. Barcelona: Editorial Graö – Biblioteca de Uno

Gimeno-Sacristán, J. (2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática* (3ª edição). Porto Alegre: Artmed.

Godfrey, C. (1910). The board of education circular on the teaching geometry In Chris Pritchard (Ed.) *The changing shape of geometry and geometry teaching*, pp. 489-495. London: Cambridge University Press

Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática emocional – los afectos en la aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, S. A. de Ediciones.

Gravemeijer, K. (1998). From a different perspective: building on students' informal knowledge In Lehrer & Chazan (Eds.) *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, pp. 45-66. London: LEA

Greenbert, M. (1994). *Euclidean and non-euclidean geometries – development and history*. USA: Freeman

Gross, P. (1997). *Joint curriculum design: facilitating learner ownership and active participation in secondary classrooms*. London: LEA

GTI (2005). *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM

Guimarães, H. (2003). *Concepções sobre a matemática e a actividade matemática: um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário* (Tese de doutoramento). Lisboa: APM.

Hake, R. (1998). Interactive-engagement vs. traditional methods: a six-thousand – student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American Journal of Physics*, 66, pp. 64-74

Hardy, G. (1925). What is geometry? In Chris Pritchard (Ed.) *The changing shape of geometry and geometry teaching*, pp 13-23. London: Cambridge University Press

Hilbert, David (2003). *Fundamentos da geometria* – edição revista e coordenada por A. J. Franco de Oliveira. Lisboa: Gradiva.

Holden, G. (1997). 'Challenge and support': the role of the critical friend in continuing Professional development In *The curriculum journal*, vol. 8 nº 3, pp. 441-453

Jaworski, Barbara (1996). *Investigating mathematics teaching – a constructivist enquiry*. London: The Falmer Press.

Kember, D.; Ha, T.; Lam, B.; Lee, A.; Ng, S.; Yan, L.; Yum, J. (1997). The diverse role of the critical friend in supporting educational action research projects, In *Educational Action Research*, Vol. 5, Nº 3, pp. 463-481

Kemper, T. (1990). *Research agendas in the sociology of emotions*. New York: State University of New York Press.

Koul, R. B. e Fisher, D.L. (2006). Student's perceptions of teacher's interpersonal behaviour and identifying exemplary teachers. In *Experience of learning*. Proceedings of the 15th Annual teaching learning forum, 1-2 February 2006. http://lsn.curtin.edu.au/tlf/tlf2006/refereed/koul.html (em 08/02/2006)

Kövecses, Z. (2000). *Metaphor and emotion – language, culture, and body in human feeling*. London: Cambridge University Press.

Lafortune, L. (1996). *Dimension affective en mathématiques*. Paris: De Boeck & Larcier, S. A.

Lafortune, L.; Saint-Pierre, L. (1996). *A afectividade e a metacognição na sala de aula*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lange, J. (1999). *Framework for classroom assessment in mathematics*. Utrecht: Freudenthal Institute & National Center for Improving Student learning and achievement in mathematics and science

Lange, J. (2002). Mathematics for literacy in B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative Literacy: Why numeracy matters for schools and colleges*. pp.75-89 Princeton:, NJ: National Council on Education and Disciplines.

LeDoux, J. (2000). *O cérebro emocional - as misteriosas estruturas da vida emocional*. Cascais: Editora Pergaminho, Lda.

Legrand, P. (1997). *Profession enseignant – les maths en college et en lycée*. Paris: Hachette Éducation.

Lehrer, R.; Chazan, D. (Eds.) (1998). *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. London: LEA

Lerman, S. (1994). *Cultural Perspectives on the mathematics classroom – mathematics education library*. London: Kluwer Academic Publishers.

Lerman, S.; Tsatsaroni, A. (2004). *Surveying the field of mathematics education research* is one of the papers for Discussion Group 10 at the Tenth International Congress on Mathematical Education in Copenhagen, July 2004 (ICME 10); paper 6 do ano de 2004 http://myweb.lsbu.ac.uk/~lermans/ESRCProjectHOMEPAGE.html consultado em Dezembro de 2009

Lessard-Hébert, M.; Goyette, G.; Boutin, G. (2005). *Investigação qualitativa – fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lopes, I. (1997). *Aspectos afectivo-emocionais da actividade matemática escolar dos alunos* (Tese de Mestrado). Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Lopes, J. (2004). *Aprender e ensinar Física*. Lisboa: FCG e FCT

Lopes, J.; Cravino, J.; Branco, M.; Saraiva, E.; Silva, A. (2008). Mediation of student learning: dimensions and evidences in science teaching. *Problems of education in the 21st century - Recent issues in science and technology education*, 9, 42-52

Maillo, A.; Aizpun, A. (1968). *La enseñanza de las matematicas*. Madrid: Aguilar, S. A. Ediciones.

Malkevitch, J. (Org.) (1991). *Geometry's Future*. Lexington, MA: COMAP, Inc.

Mammana, C.; Villani, V. (Eds.) (1998). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century-an ICMI study.* London: Kluwer Academic Publishers

Martins, I. (2005). *Ciência, paz e desenvolvimento: Conferência proferida em seminário* no âmbito da disciplina de Cultura, Conhecimento e Identidade de 05/01/28

Mason, J. (2002). *Researching your own practice, the discipline of noticing*. London Routledge Falmer

ME (2001). *Currículo nacional do ensino básico – competências essenciais*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

ME, (2004a). *PISA 2003 – Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática.* Lisboa: ME

ME, (2004b). *PISA 2003 – Resultados do estudo internacional.* Lisboa: ME

Meaney, T.; Lange, T.; Valero, P. (2009). Dispositions and changing teacher practice in mathematics. Paper presented at the Australian association for research in Education Research Conference (30 November – 3 December at Camberra, ACT). Consultado em http://www.aare.edu.au/09pap/mea0913676.pdf em Maio de 2010

ME/DGIDC (2004c). *Provas de aferição do ensino básico: 4º, 6º e 9º Anos – 2003*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação

ME/DGIDC (2004d). *Provas de aferição do ensino básico: 4º, 6º e 9º Anos – Análise comparativa (2001-2003).* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação

ME/DGIDC (2004e). *Provas de aferição do ensino básico: 4º, 6º e 9º Anos – 2004*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação

Menezes, L.; Santos, L.; Gomes, H.; Rodrigues, C. (2008). *Avaliação em matemática. Problemas e desafios*. Viseu: SEM-SPCE

Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénoménologie de la perception*. Paris: Éditions Gallimard.

Mesquita, Ana M. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géometrie: elements pour une typologie* (Tese de doutoramento). Lisboa: APM.

Mclure, S.; Davies, P. (1991). *Learning to think: thinking to learn – the proceedings of the 1989 OECD conference organized by the centre for educacional research and innovation.* Oxford: Pergamon

Monereo, C.; Castelló, M. (2009). La evaluación como herramienta de cambio educativo: evaluar las evaluaciones In Monereo, C. (Coord.) *PISA como excusa repensar la evaluación para cambiar la enseñanza*.pp: 15-31 Barcelona: Graö

Morais, C. (2000). *Complexidade e comunicação mediada por computador na aprendizagem de conceitos matemáticos – um estudo no 3º Ciclo do ensino básico* (tese de doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Mortimer, E.; Scott, P. (2003). *Meaning making in secondary science classrooms*. Philadelfia: Open University Press

Moreira, D.; Lopes, C.; Oliveira, I.; Matos, J.; Vicente, L. (2001). *Matemática e comunidades – a diversidade social no ensino-aprendizagem da matemática*. Lisboa: SPCE

Morgan, C. (2008). Avaliação formativa: apoio ou regulação dos alunos e professores? In Menezes, L.; Santos, L.; Gomes, H.; Rodrigues, C. (Org.) *Avaliação em matemática, problemas e desafios* pp. 51-59. Viseu: SEM-SPCE

Neto, M. (1998). *Abordagem dinâmica da geometria num programa de formação inicial de professores* (Tese de Mestrado). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom project Denmark: Roskilde http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_the_mathematics.pdf (em 03/03/2007)

Nunes, T.; Bryant, P. (1997). *Learning and teaching mathematics – an international perspective*. United Kingdom: Psychology Press, Ltd.

OCDE (2005). *Definition and selection of key competencies: executive summary*. https://www.pisa.oecd.org/dataoecd/47/61/35070367.pdf (em 24/10/2005)

Ordoñez, V. (2005) A educação fundamental no século XXI In Jacques Delors (Org.) *A Educação para o século XXI, questões e perspectivas*. pp. 155-159. Brasil: Artmed

Oliveira, O. (2000). *O professor, os alunos e as interacções na aula de matemática: dois estudos de caso com turmas do 7º e 8º ano* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Paula, I. (2005). Utilização de portefólios como processo integrador da aprendizagem in APM (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM

Pastor, A.; Rodríguez, Á. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Editorial Sintesis.

Perez, F.; Diogo, M. (2005). Aprender matemática reflectindo in APM (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM

Perrenoud, P. (2000). *Novas competências para ensinar*. Porto Alegre: ARTMED

Pires, M. Manuela (2001). *A diversificação de tarefas em matemática no ensino secundário: um projecto de investigação-acção* (Tese de Mestrado). Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em matemática, In APM (ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM. 11-34

Pratt, D. (1994). *Curriculum planning: a handbook for professionals*. London: Harcourt Brace College Publishers.

Price, M. (2003). Introductory essay: a century of school geometry teaching: from Euclid to the "Subject which dare not speak its name"? In Chris Pritchard (Ed.) *The changing shape of geometry and geometry teaching*, pp. 463-485. London: Cambridge University Press

Pritchard, C. (2003). *The changing shape of geometry – celebrating a century of geometry and geometry teaching*. United Kingdom: Cambridge university Press.

Pureza, J. (2002). Por um contrato socioeducativo pela cidadania, in Conselho Nacional de Educação – ME *Qualidade e avaliação da educação*. Lisboa: CNE-ME

Rafael, A. (1998). *Avaliação em matemática no ensino secundário – concepções e práticas de professores e expectativas de alunos* (Tese de Mestrado). Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Recio, A. (1989). *Una metodologia active y ludica para la enseñanza de la geometria – matematicas: cultura y aprendizage*. Madrid: Editorial Sintesis.

Rocha, A.; Fonseca, C. (2005). Discutir Matemática: um contributo para a aprendizagem in APM (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM

Roldão, M. do Céu (1999). *Os professores e a gestão do currículo – perspectivas e práticas em análise*. Colecção CIDInE, Porto Editora

Roldão, M. Céu (1999). *Gestão curricular – fundamentos e práticas*. Lisboa: Ministério da Educação.

Roldão, M. Céu (2000). *Currículo* e *gestão das aprendizagens: as palavras e as práticas*. Aveiro: Universidade de Aveiro

Roldão, M. Céu (2004). *Gestão do currículo e avaliação de competências – as questões dos professores*. Lisboa: Editorial Presença

Rosário, P. (1999). As abordagens dos alunos ao estudo: diferentes modelos e suas interrelações In *Psicologia: teoria, investigação e prática*, (1), pp. 043-061

Rosenfeld, B. (1988). A history of non-euclidean geometry – evolution of the concept of a geometry space.

Russell, B. (1902). The teaching of Euclid In Chris Pritchard (Ed.) *The changing shape of geometry and geometry teaching*, pp. 486-488. London: Cambridge University Press

Sá-Chaves, Idália (2004). *Cultura, Conhecimento e Identidade: programa da disciplina*. Disciplina do programa de Doutoramento com Base Curricular em Didáctica – Universidade de Aveiro

Santos, M. (2005). *Que educação?* – tomo I. Lisboa: Santos-Edu

Saraiva, M.; Coelho, M.; Matos, J. (2002). *Ensino e aprendizagem da geometria*. Lisboa: SPCE-SEM

Scott, P.; Mortimer, E. (2006). The tension between authoritative and dialogic discourse: a fundamental characteristic of meaning making interactions in high school science lessons In *Wiley interScience* (on-line).

Seeger, F.; Voigt, J.; Waschescio, U. (1998). *The culture of the mathematics classroom*. United Kingdom: Cambridge University Press.

Serrazina, L.; Oliveira, I. (2005). O currículo de matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática in APM (Ed.) *O professor e o desenvolvimento curricular*. pp. 35-62. Lisboa: APM

Shank, M. (2006). Teacher storytelling: a means for creating and learning within a collaborative space In *Teaching and Teacher Education*, 22, pp. 711-721

Siddons, A. (1956). Fifty years of change In Chris Pritchard (Ed.) *The changing shape of geometry and geometry teaching*, pp. 500-504. London: Cambridge University Press

Silva, A. (2004). *Desenvolvimento de competências sociais nos adolescentes*. Lisboa: Climepsi Editores.

Skovsmose, O.; Valero, P. (1992). Quebrando a neutralidade política: o compromisso crítico entre a educação matemática e a democracia in *Quadrante*, Vol. XI, nº 1, 2002, p. 7-28. Lisboa: APM

Slattery, P. (1995). *Curriculum development in the postmodern era.* New York & London: Garland publishing, inc.

Soler, G. (1997). *Poliedros – matematicas: cultura y aprendizage*. Madrid: Editorial Sintesis.

Stein, M.; Wang, M. (1988). Teacher development and school improvment: the process of the teacher change In *Teaching and Teacher Education*, vol. 4, Nº 2, pp. 171-187

Swaffield, S. (2002). *Contextualising the work of the critical friend*. Paper for the 15th international Congress for School Efectiveness and Improvement January 2002

Swaffield, S. (2005). No sleeping partners: relationships between head teachers and critical friends in *School Leadership & Management*, 25, 01, pp. 43-57

Tavares, J. (1992). *A aprendizagem como construção de conhecimento pela via da resolução de problemas e da reflexão*. Aveiro: CIDInE

Tiberghien, A.; Buty, C. (2007). Studying science teaching practices in relation to learning: time scales of teaching phenomena In R. Pintó and D. Couso (Eds), *Contributions from science education research*, pp.59-75. Paris: Springer

Trillo, F. (2000). *Atitudes e valores no ensino*. Lisboa: Instituto Piaget.

Trindade, R. (2002). *Experiências educativas e situações de aprendizagem – novas práticas pedagógicas*. Porto: ASA Editores, S. A.

UNESCO (1999). *Conferência Mundial sobre a Ciência: Ciência para o século XXI – um novo compromisso*. Budapeste

Vale, I. (1999). Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz in APM (Eds), *Actas do ProfMat99*, pp. 111-120. Lisboa: APM

Vale, I. (2002). *Materiais manipuláveis*. Viana do Castelo: Laboratório de Educação Matemática

Vale, I. (2003). Didactic materials in initial elementary mathematics teacher education: the use of manipulative in geometry, In proceedings of the *CIEAEM 55*, Plock, Poland

Valero, P. (1992). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia in *Quadrante*, Vol. XI, nº 1, 2002, p. 49-59. Lisboa: APM

Veloso, E. (1998*). Geometria - temas actuais*. Lisboa: IIE

Veloso, E.; Fonseca, H.; Ponte, J.; Abrantes, P. (1999*). Ensino da geometria no virar do milénio*. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Veloso, E.; Ponte, J. (1999). Introdução, in Veloso *et al* (org.) *Ensino da geometria no virar do milénio*. Lisboa: DEFCUL. 1-5

Veloso, E. (1999). Ensino da geometria: ideias para um futuro melhor. In Veloso *et al* (org.) *Ensino da geometria no virar do milénio,* pp.17-32. Lisboa: DEFCUL.

Vergnaud, G. (1996). La théorie des champs conceptuels, In Jean Brun (Org.) *Didactique des mathématiques*, pp. 197-242 Paris: Delachaux et niestlé

Vygotsky, L. S. (1994). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora, Lda.

Yeigh, T. (2008). Quality teaching & Professional learning: uncritical reflections of a critical friend In *Australian journal of teacher education*, vol 33, 2, pp. 1-15

Weil-Barais, A., Dumas-Carré, A. (1998). Les interactions didactiques tutelle et/ou médiation, in Weil-Barais & Dumas-Carré, (Eds.) *Tutelle et médiation dans l'éducation scientifique*. Paris: Peter Lang S. A. 1-11

Wierzbicka, A. (1999). *Emotions across languages and cultures – diversity and universals*. United Kingdom: Cambridge University Press.

Woods, P. (1996). *Investigar a arte de ensinar*. Porto: Porto Editora.

Zabala, A. (2002). *Enfoque globalizador e pensamento complexo – uma proposta para o currículo escolar*. São Paulo: Artmed.

Anexo I – QEAME – questionário acerca do ensino, da avaliação e modos de estudar dos alunos

QUESTIONÁRIO

Este questionário insere-se numa investigação que visa melhorar o processo ensino/ aprendizagem da Matemática no Ensino Básico. *O propósito deste questionário é recolher as opiniões dos estudantes acerca do ensino e da avaliação na disciplina de Matemática.*
As suas respostas são confidenciais e serão utilizadas apenas para fornecer informação para investigações que visam melhorar a qualidade do ensino.

A sua colaboração é preciosa.

Junho de 2005

A. DADOS PESSOAIS

1. Sexo **F** ☐ **M** ☐

2. Idade

Ano e Turma **2004/2005**	Ano e Turma em **2003/2004**	Ano e Turma em **2002/2003**	Ano e Turma em **2001/2002**

PARTE 1:

COMO RESPONDER: Faça uma circunferência em torno do número ao lado de cada frase que melhor se ajusta à sua opinião, de acordo com a classificação abaixo:

- 1 significa que **discorda completamente**;
- 2 significa que **tende a discordar**;
- 3 significa que **não se aplica ou não sabe responder**;
- 4 significa que **concorda, mas com reservas**;
- *5* significa que **concorda completamente**.

1. É sempre fácil saber qual o grau de exigência do trabalho que é esperado de si nesta disciplina.	1	2	3	4	5
3. A professora motiva os estudantes no sentido de darem o seu melhor.	1	2	3	4	5
4. O trabalho exigido nesta disciplina é excessivo.	1	2	3	4	5
5. A professora desta disciplina dá frequentemente a impressão de não ter nada a aprender com os estudantes.	1	2	3	4	5
7. A professora desta disciplina dedica bastante tempo a comentar o trabalho dos estudantes	1	2	3	4	5
8. Para passar nesta disciplina tudo o que é realmente preciso é ter uma boa memória.	1	2	3	4	5
9. Esta disciplina parece encorajar os estudantes a desenvolverem, tanto quanto possível, os seus próprios interesses académicos.	1	2	3	4	5
11. Os estudantes têm uma grande possibilidade de escolher o modo como vão aprender nesta disciplina.	1	2	3	4	5
12. A professora desta disciplina parece mais interessados em testar aquilo que nós memorizamos do que aquilo que compreendemos.	1	2	3	4	5
13. É frequentemente difícil descobrir o que é esperado de nós nesta disciplina.	1	2	3	4	5
14. Em geral, é-nos dado tempo suficiente para compreender as coisas que temos de aprender.	1	2	3	4	5
15. A professora faz um esforço real para entender as dificuldades que os estudantes possam ter no seu trabalho.	1	2	3	4	5
17. A professora desta disciplina dá normalmente informação acerca de como os estudantes vão progredindo.	1	2	3	4	5
18. A professora é extremamente boa a explicar-nos a matéria.	1	2	3	4	5
19. Os objectivos gerais e específicos desta disciplina não são fornecidos de modo muito claro.	1	2	3	4	5
20. A professora trabalha arduamente no sentido de tornar atraente esta disciplina para os estudantes.	1	2	3	4	5
22. A informação sobre o trabalho de cada estudante é fornecida APENAS sob a forma de classificações e níveis.	1	2	3	4	5
23. Discutimos frequentemente com a professora acerca do modo como vamos aprender nesta disciplina.	1	2	3	4	5
24. A professora não demonstra interesse real naquilo que os estudantes têm para dizer.	1	2	3	4	5
25. É possível passar nesta disciplina trabalhando arduamente apenas nas vésperas dos testes.	1	2	3	4	5
26. Nesta disciplina tenta-se realmente obter o melhor da parte de todos os estudantes.	1	2	3	4	5
28. A professora desta disciplina torna claro desde o início o que espera dos estudantes.	1	2	3	4	5

PARTE 2:

COMO RESPONDER: Faça uma circunferência em torno do número ao lado de cada frase que melhor se ajusta à sua opinião, de acordo com a seguinte escala:

- 1 significa **nunca**;
- 2 significa **raramente**;
- 3 significa **em cerca de metade**;
- 4 significa **quase sempre**;
- *5* significa **sempre**.

30. Nesta disciplina, é importante para a minha aprendizagem					
O trabalho de grupo	1	2	3	4	5
As aulas do tipo expositivo	1	2	3	4	5
O trabalho a pares	1	2	3	4	5
O trabalho individual	1	2	3	4	5

31. O professor desta disciplina usa exemplos do dia-a-dia quando aborda os assuntos que está a ensinar?	1	2	3	4	5

32. A professora distingue <u>explicitamente</u> entre conceitos, leis, regras, princípios, tese, hipótese, axioma, teoremas.	1	2	3	4	5

33. Qual é a importância de cada uma das actividades indicadas abaixo para a minha aprendizagem					
	nenhuma	Pouca	Alguma	Muita	Bastante
Resolução de problemas					
Actividades com materiais manipuláveis					
Composições/redacções					
Realização de projectos					
Trabalhos individuais					
Relatórios de grupo					
Actividades com calculadoras					
Outra:…………………………………….					

34. Costuma estudar Matemática sozinho(a)	1	2	3	4	5

35. Se estuda acompanhado(a), assinale com um **X** <u>todas</u> as modalidades que utiliza	
Estudo em grupo com colegas da mesma turma	
Estudo em grupo com colegas de outra escola	
Frequento aulas de apoio dadas na sua escola	
Explicações fora da escola	
Tiro dúvidas com os meus pais e/ou irmãos mais velhos	

36. Costuma relacionar o que estuda na Matemática com situações do seu dia-a-dia?	1	2	3	4	5

37. Costuma formular questões e colocá-las ao professor?	1	2	3	4	5

38. Indique (com um ***X***) a frequência com que utiliza as seguintes estratégias de estudo na Matemática					
	nunca	raramente	Frequente-mente	Quase sempre	Sempre
Resolução de exercícios/problemas					
Leitura do manual					
Apontamentos das aulas					
Elaboração de esquemas					
Elaboração de resumos					
Outra: …………………………….					

39. Indique (com um ***X***) a relevância que a Matemática tem para a sua formação cultural e social	1	2	3	4	5

40. Necessita de memorizar intensivamente para aprender o essencial de cada assunto na Matemática?	1	2	3	4	5

41. Na sua opinião conseguiu compreender o essencial dos assuntos que foram abordados nas aulas de Matemática?	1	2	3	4	5

42. Assinale, no quadro abaixo, os elementos de avaliação que contribuíram para uma melhor avaliação final do seu trabalho à disciplina de Matemática				
Elemento de avaliação	Nada	Pouco	Razoável	Muito
Testes periódicos				
Relatórios individuais de actividades diversas				
Relatórios de grupo de actividades diversas				
Trabalhos escritos individualmente				
Trabalhos escritos em grupo				
Apresentações orais				
Trabalho de projecto				
Atitudes e valores				
Capacidades e aptidões				

43. Os critérios de avaliação da Matemática são claramente explicitados pela professora	Sim	Não

Outras observações (relativas às aulas na disciplina de Matemática)

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Obrigada pela sua colaboração

Anexo II – Teste diagnóstico (competências)

QUESTIONÁRIO PARA A IDENTIFICAÇÃO DAS COMPETÊNCIAS DESENVOLVIDAS NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA NO TEMA DE GEOMETRIA NO ENSINO BÁSICO

Este estudo insere-se numa investigação que visa melhorar o processo ensino/ aprendizagem da Matemática no Ensino Básico. Este questionário tem por objectivo identificar as competências matemáticas desenvolvidas no tema de geometria. Para isso, responda cuidadosamente a todas as perguntas. Desde já agradece-se a sua valiosa colaboração

Maio de 2005

Instruções:

1. Este teste diagnóstico é anónimo.
2. Preencha os dados de identificação nesta página.
3. Marque a resposta adequada seguindo as indicações expressas.
4. Procure responder a todas as questões na própria folha.

A. DADOS PESSOAIS

1. Sexo **F** ☐ **M** ☐

2. Idade ☐

Ano e Turma **2004/2005**	Ano e Turma em **2003/2004**	Ano e Turma em **2002/2003**	Ano e Turma em **2001/2002**

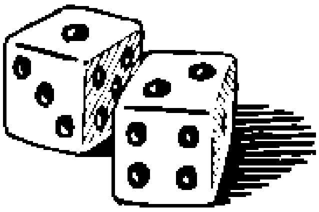
DADOS DE JOGAR

Questão 1: DADOS DE JOGAR

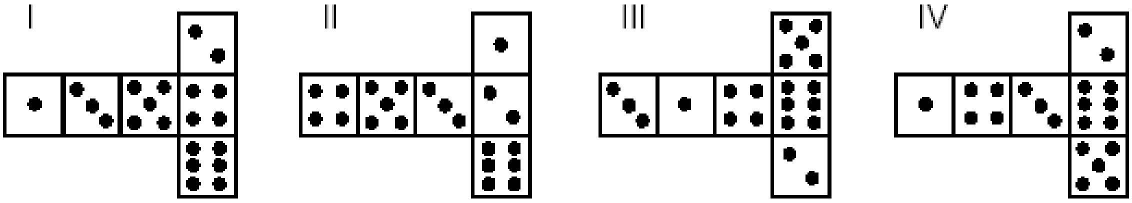
[32] *M555Q02*

No desenho à direita estão representados dois dados.
Os dados são cubos com as faces numeradas de acordo com a regra seguinte:

> *A soma das pintas em duas faces opostas é sempre igual a 7.*



Podemos facilmente construir um dado recortando, dobrando e colando cartão. Isto pode ser feito de diversas maneiras. Na figura abaixo estão representados quatro desses cortes que podem ser utilizados para construir dados, com pintas nas faces.
Qual, ou quais, da(s) forma(s) seguinte(s) pode(m) ser dobrada(s) de modo a formar um cubo que obedece à regra segundo a qual a soma das pintas das faces opostas é 7?
Para cada uma das formas, faça um círculo em torno de «Sim» ou de «Não», na tabela abaixo.



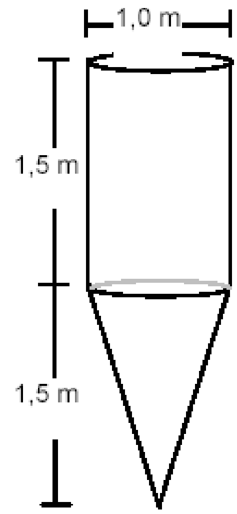
Forma	Obedece à regra segundo a qual a soma das pintas das faces opostas é 7?
I	Sim/Não
II	Sim/Não
III	Sim/Não
IV	Sim/Não

[32] Questão sob o código *M555Q02* , GAVE, 2004. *Resultados do Estudo Internacional PISA 2003– Primeiro relatório nacional*. Lisboa: ME

RESERVATÓRIO DE ÁGUA

Questão 2: RESERVATÓRIO DE ÁGUA[33] *M465Q01*

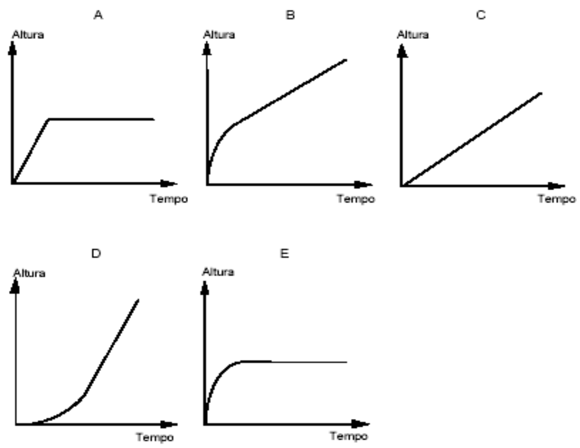
Reservatório de água



Um reservatório de água tem a forma e as dimensões indicadas na figura.
No início, o reservatório está vazio. Depois, enche-se de água, à razão de um litro por segundo.

Qual dos gráficos seguintes representa o modo como varia a altura da água no reservatório, com o decorrer do tempo?

Resposta:__________________________________



Explica, sucintamente, quais as razões que te levaram a rejeitar os outros quatro?

Resposta:____

____

____

____

____

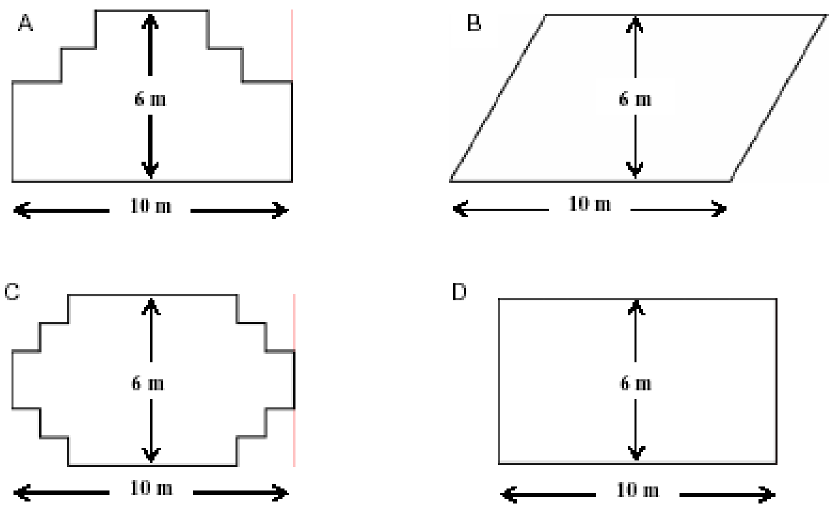
____

[33] Adaptação da questão sob o código **M465Q01**, GAVE, 2004. *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de Literacia Matemática no Estudo Internacional PISA 2003*. Lisboa: ME

CARPINTEIRO

Questão 3: CARPINTEIRO[34] *M266Q01*

Um carpinteiro tem 32 metros de madeira e deseja construir um rebordo à volta de um canteiro de um jardim. Está a considerar os seguintes esquemas para o canteiro.



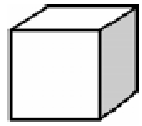
Faça um círculo em torno de «Sim» ou de «Não» a fim de indicar, para cada um dos esquemas, se o canteiro que lhe corresponde pode, ou não, ser construído com os 32 metros de tábuas.

Esquema do canteiro	**O canteiro pode ser construído com os 32 metros de madeira?**
Esquema A	Sim / Não
Esquema B	Sim / Não
Esquema C	Sim / Não
Esquema D	Sim / Não

[34]Questão sob o código *M266Q01*, GAVE, 2004. *Resultados do Estudo Internacional PISA 2003– Primeiro relatório nacional*. Lisboa: ME

CONSTRUINDO BLOCOS

A Susana gosta de construir blocos, utilizando pequenos cubos iguais aos da figura seguinte.



Pequeno cubo

A Susana tem uma grande quantidade de pequenos cubos iguais a este. Usa cola para juntar os pequenos cubos uns aos outros, de modo a construir blocos de vários tipos.

Para começar, a Susana cola oito desses cubos para construir o bloco representado na Figura A.

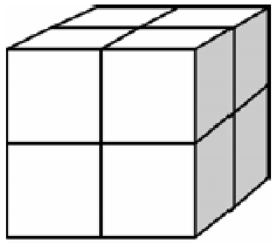


Figura A

A seguir a Susana constrói os blocos maciços representados nas Figuras B e C seguintes.

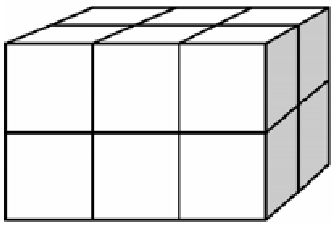


Figura B

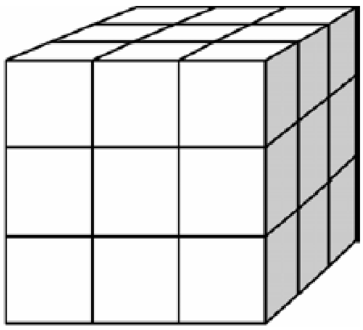


Figura C

Questão 4.1: CONSTRUINDO BLOCOS[35] *M309Q01*

De quantos pequenos cubos precisa a Susana para construir o bloco representado na Figura B?

Resposta: .... cubos.

[35] Questão sob o código ***M309Q01***, GAVE, 2004. *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de Literacia Matemática no Estudo Internacional PISA 2003*. Lisboa: ME

Questão 4.2: CONSTRUINDO BLOCOS[36] ***M309Q02***

De quantos pequenos cubos vai a Susana precisar para construir o bloco maciço representado na Figura C?

Resposta: .... cubos.

Questão 4.3: CONSTRUINDO BLOCOS[37] ***M309Q03***

A Susana toma consciência de que utilizou mais cubos do que os necessários para construir um bloco como o que se apresenta na Figura C. Percebe que podia ter colado os pequenos cubos de modo a ficarem com a aparência da Figura C, mas que o bloco podia ser oco por dentro.

Qual é o número mínimo de pequenos cubos de que ela precisa para construir um bloco com um aspecto igual ao da Figura C, mas oco por dentro?

Resposta: .... cubos.

Questão 4.4: CONSTRUINDO BLOCOS[38] ***M309Q04***

Agora a Susana quer construir um bloco com o aspecto de um bloco maciço com 6 pequenos cubos de comprimento, 5 pequenos cubos de largura e 4 pequenos cubos de altura. Quer utilizar o menor número possível de cubos, deixando o máximo de espaço vazio no interior do bloco.

Qual é o número mínimo de pequenos cubos de que a Susana precisa para construir este bloco?

Resposta: .... cubos.

[36] Questão sob o código ***M309Q02***, GAVE, 2004. *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de Literacia Matemática no Estudo Internacional PISA 2003*. Lisboa: ME

[37] Questão sob o código ***M309Q03***, GAVE, 2004. *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de Literacia Matemática no Estudo Internacional PISA 2003*. Lisboa: ME

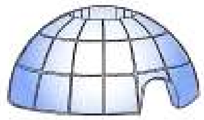
[38] Questão sob o código ***M309Q04***, GAVE, 2004. *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de Literacia Matemática no Estudo Internacional PISA 2003*. Lisboa: ME

IGLO

Questão 5: ESFERA

O iglo onde habita o esquimó Michael tem a forma de uma semiesfera com o diâmetro de 5 metros

Qual o volume de ar existente dentro do iglo?



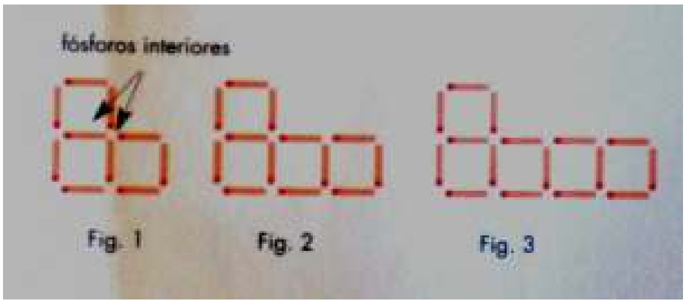
Resposta:

....

ESTRUTURAS COM FÓSFOROS

Questão 6: ESTRUTURAS

Observa a figura seguinte onde são apresentadas diferentes figuras que representam estruturas com fósforos: na figura 1 foram utilizados num total de **10** fósforos, **oito** fósforos para formar o **exterior** e **dois** fósforos para formar as divisões **interiores**.



Questão 6.1: Desenha a representação da estrutura com fósforos correspondente a uma figura 4 que tenha a mesma lógica de construção das 3 primeiras figuras:

Questão 6.2: Relativamente à figura 3 indica a área,, o número de lados e o perímetro da figura geométrica resultante da estrutura com fósforos.

Resposta: ………………………………………………………………………………..

Questão 6.3: Considerando ainda a figura geométrica resultante da figura 3 verifica se se trata de uma planificação de uma caixa de forma cúbica sem tampa.

Resposta: ………………………………………………………………………………..

Questão 6.4: Considerando ainda as estruturas com fósforos acima representadas e a mesma lei de construção das estruturas com fósforos completa a tabela.

Fig. nº	1	2	3	...	10	….	n
Nº de fósforos interiores	**2**	**3**					

CUBOS E POSIÇÃO RELATIVA

Questão 7: CUBOS

Na construção representada na Figura 1, todos os cubos são geometricamente iguais.

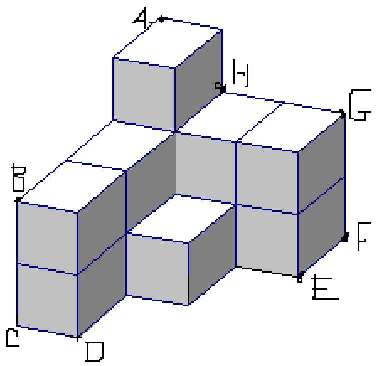


Figura 1

Na figura indica:

Um par de rectas concorrentes com um planoR:……………………………..

Um par de rectas não complanaresR:……………………………..

Um par de rectas paralelasR:……………………………..

Dois planos perpendicularesR:……………………………..

RECTAS E PLANOS

Questão 8:

8.1 Diz se é verdadeira ou falsa

"*Se uma recta **r** e um plano α são perpendiculares a uma recta **s**, então **r** e α são paralelos*"

Resposta……………………………………………………………………………………

8.2 No teorema seguinte, identifica a **hipótese** e a **tese** e demonstra-o

"*Uma recta é perpendicular a um plano se for perpendicular a duas rectas concorrentes desse plano*"

Resposta:

Hipótese:…………………………………………………………………………..

Tese:……………………………………………………………………………

Demonstração:

Obrigada pela sua colaboração

Anexo III – Teste (competências)

TESTE

Este teste insere-se numa investigação que visa melhorar o processo ensino/ aprendizagem da Matemática no Ensino Básico. Este teste tem por objectivo identificar as competências matemáticas desenvolvidas no tema de geometria no final do 9º Ano. Para isso, responda cuidadosamente a todas as perguntas. Desde já agradece-se a sua valiosa colaboração.
Junho de 2005

Instruções:

1. Este teste é anónimo.
2. Preencha os dados de identificação nesta página.
3. Marque a resposta adequada seguindo as indicações expressas.
4. Procure responder a todas as questões na própria folha.

A. DADOS PESSOAIS

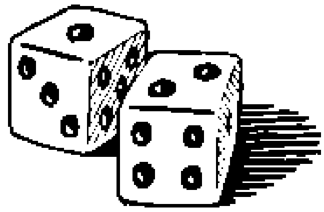
1. Sexo F ☐ M ☐

2. Idade ☐

Ano e Turma **2004/2005**	Ano e Turma em **2003/2004**	Ano e Turma em **2002/2003**	Ano e Turma em **2001/2002**
☐	☐	☐	☐

DADOS DE JOGAR

Questão 1: DADOS DE JOGAR·



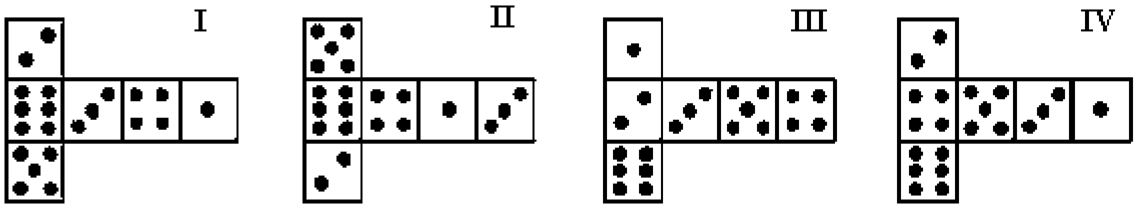
No desenho à direita estão representados dois dados.
Os dados são cubos com as faces numeradas de acordo com a regra seguinte:

A soma das pintas em duas faces opostas é sempre igual a 7.

Podemos facilmente construir um dado recortando, dobrando e colando cartão. Isto pode ser feito de diversas maneiras. Na figura abaixo estão representados quatro desses cortes que podem ser utilizados para construir dados, com pintas nas faces.

Qual, ou quais, da(s) forma(s) seguinte(s) pode(m) ser dobrada(s) de modo a formar um cubo que obedece à regra segundo a qual a soma das pintas das faces opostas é 7?

Para cada uma das formas, faça um círculo em torno de «Sim» ou de «Não», na tabela abaixo.



Forma	Obedece à regra segundo a qual a soma das pintas das faces opostas é 7?
I	Sim/Não
II	Sim/Não
III	Sim/Não
IV	Sim/Não

RESERVATÓRIO DE ÁGUA

Questão 2: RESERVATÓRIO DE ÁGUA Reservatório de água

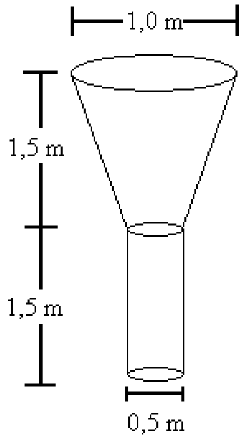


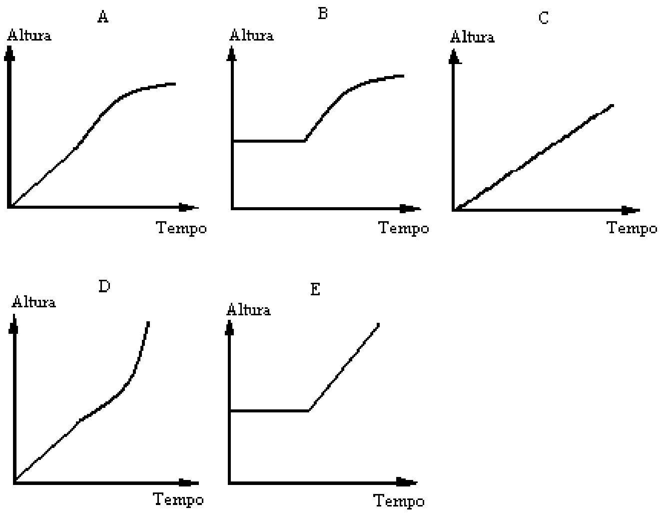
Figura 1

Um reservatório de água tem a forma e as dimensões indicadas na figura 1.

No início, o reservatório está vazio. Depois, enche-se de água, à razão de um litro por segundo.

Qual dos gráficos seguintes representa o modo como varia a altura da água no reservatório, com o decorrer do tempo?

Resposta:______________________________



Explica, sucintamente, quais as razões que te levaram a rejeitar os outros quatro?

Resposta:……………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

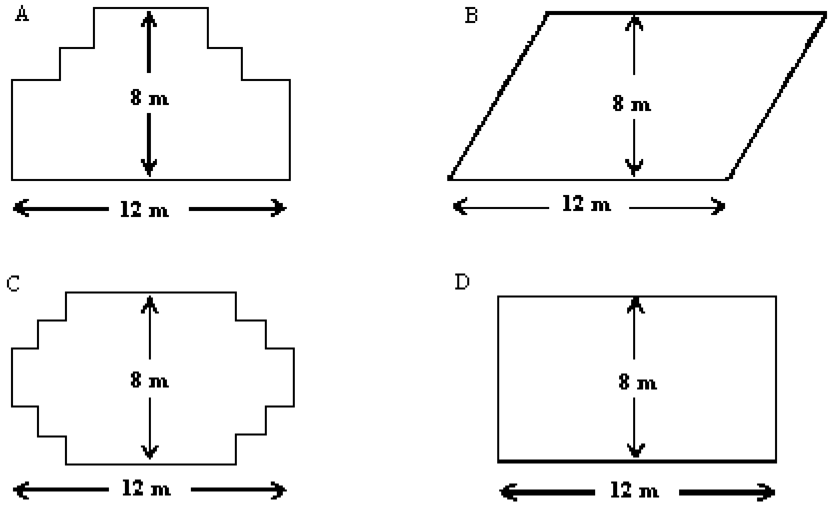
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

CARPINTEIRO

Questão 3: CARPINTEIRO

Um carpinteiro tem 40 metros de ripas de madeira e deseja construir um rebordo à volta de um canteiro de um jardim. Está a considerar os seguintes esquemas para o canteiro.

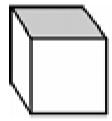


Faça um círculo em torno de «Sim» ou de «Não» a fim de indicar, para cada um dos esquemas, se o canteiro que lhe corresponde pode, ou não, ser construído com os 40 metros de tábuas.

Esquema do canteiro	**O canteiro pode ser construído com os 40 metros de madeira?**
Esquema A	Sim / Não
Esquema B	Sim / Não
Esquema C	Sim / Não
Esquema D	Sim / Não

CONSTRUINDO BLOCOS

A Susana gosta de construir blocos, utilizando pequenos cubos iguais aos da figura seguinte.



Pequeno cubo

A Susana tem uma grande quantidade de pequenos cubos iguais a este. Usa cola para juntar os pequenos cubos uns aos outros, de modo a construir blocos de vários tipos.

Para começar, a Susana cola oito desses cubos para construir o bloco representado na Figura A.

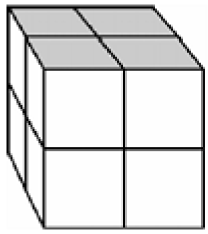


Figura A

A seguir a Susana constrói os blocos maciços representados nas Figuras B e C seguintes.

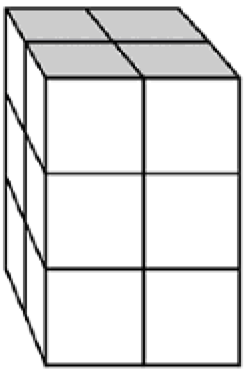


Figura B

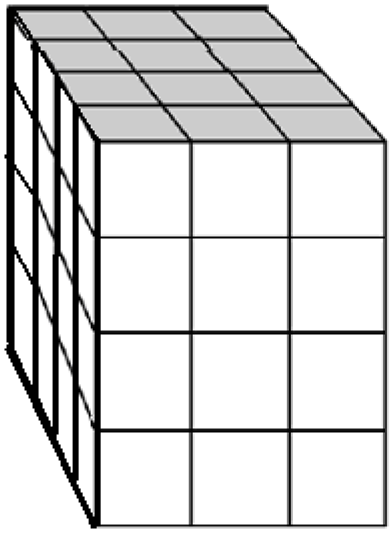


Figura C

Questão 4.1: CONSTRUINDO BLOCOS

De quantos pequenos cubos precisa a Susana para construir o bloco representado na Figura B?

Resposta: .... cubos.

Questão 4.2: CONSTRUINDO BLOCOS

De quantos pequenos cubos vai a Susana precisar para construir o bloco maciço representado na Figura C?

Resposta: .... cubos.

Questão 4.3: CONSTRUINDO BLOCOS

A Susana toma consciência de que utilizou mais cubos do que os necessários para construir um bloco como o que se apresenta na Figura C. Percebe que podia ter colado os pequenos cubos de modo a ficarem com a aparência da Figura C, mas que o bloco podia ser oco por dentro.

Qual é o número mínimo de pequenos cubos de que ela precisa para construir um bloco com um aspecto igual ao da Figura C, mas oco por dentro?

Resposta: .... cubos.

Questão 4.4: CONSTRUINDO BLOCOS

Agora a Susana quer construir um bloco com o aspecto de um bloco maciço com 4 pequenos cubos de comprimento, 5 pequenos cubos de largura e 6 pequenos cubos de altura. Quer utilizar o menor número possível de cubos, deixando o máximo de espaço vazio no interior do bloco.

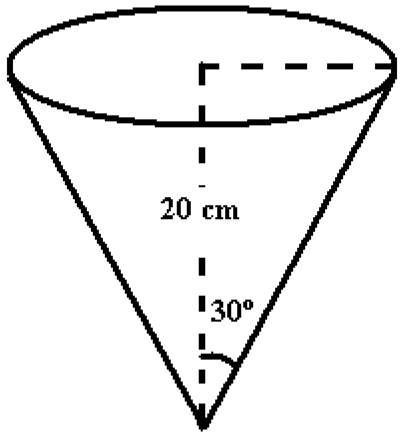
Qual é o número mínimo de pequenos cubos de que a Susana precisa para construir este bloco?

Resposta: .... cubos.

Embalagem

Questão 5: CONE

O Michael comprou pipocas e foram-lhe dadas numa embalagem em forma de cone conforme se pode ver na figura.



Questão 5.1. Qual o raio da base do cone?

Resposta:

....

Questão 5.2. Qual o volume da embalagem em forma de cone?

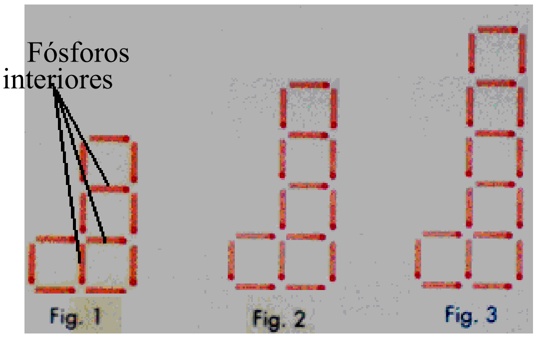
Resposta:

....

ESTRUTURAS COM FÓSFOROS

Questão 6: ESTRUTURAS

Observa a figura seguinte onde são apresentadas diferentes figuras que representam estruturas com fósforos: na figura 1 foram utilizados num total de **13** fósforos, **dez** fósforos para formar o **exterior** e **três** fósforos para formar as divisões **interiores**.



Questão 6.1: Desenha a representação da estrutura com fósforos correspondente a uma figura 4 que tenha a mesma lógica de construção das 3 primeiras figuras:

Questão 6.2: Relativamente à figura 3 indica a área, o número de lados e o perímetro da figura geométrica resultante da estrutura com fósforos.

Resposta: ………………………………………………………………………………..

Questão 6.3: Considerando ainda a figura geométrica resultante da figura 3 verifica se se trata de uma planificação de um cubo.

Resposta: ………………………………………………………………………………..

Questão 6.4: Considerando ainda as estruturas com fósforos acima representadas e a mesma lei de construção das estruturas com fósforos completa a tabela.

Fig. nº	1	2	3	...	10	….	n
Nº de fósforos interiores	**3**	**4**					

CUBOS E POSIÇÃO RELATIVA

Questão 7: CUBOS

Na construção representada na Figura 1, todos os cubos são geometricamente iguais.

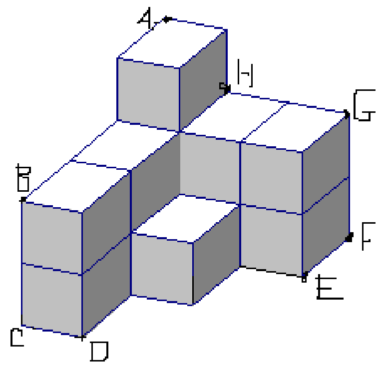


Figura 1

Na figura indica:

Um par de rectas concorrentes com um planoR:……………………………..

Um par de rectas não complanaresR:……………………………..

Um par de rectas paralelasR:……………………………..

Dois planos perpendicularesR:……………………………..

RECTAS E PLANOS

Questão 8:

8.1 Diz se é verdadeira ou falsa

"Se uma recta ***r*** *e um plano* α *são perpendiculares a uma recta* ***s****, então* ***r*** *e* α *são paralelos"*

Resposta…………………………………………………………………………………….

8.3 No teorema seguinte, identifica a **hipótese** e a **tese** e demonstra-o

"*Uma recta é perpendicular a um plano se for perpendicular a duas rectas concorrentes desse plano*"

Resposta:

Hipótese:…………………………………………………………………………..

Tese:………………………………………………………………………………….

Demonstração:

Obrigada pela sua colaboração

Anexo IV – Listagem Dinâmica de Perguntas

LISTAGEM DINÂMICA DE PERGUNTAS

Nome_____________________________________nº____Turma______

Tema:____
Data_____________

1. O que aprendi?

2. O que me falta aprender? Formular perguntas sobre o que falta aprender.

3. Quais as minhas dificuldades?

4. Do que é que gostei mais? Porquê?

5. Do que é que gostei menos? Porquê?

6. Que ajuda espero da professora?

Quais são as perguntas a que tenho de saber responder neste tema?

Quais são as perguntas a que tenho de saber responder neste tema?

Anexo V – RECOLHA DE INFORMAÇÕES[39]

(Set. 2002)

QUAL É A TUA RELAÇÃO EMOCIONAL COM A MATEMÁTICA?

Agradecemos, desde já, a tua **disponibilidade** para o preenchimento deste formulário. Pedimos-te que o faças com o máximo de **honestidade** e asseguramos-te de que será mantido em estreito **sigilo.**

1. ALGUMA VEZ GOSTASTE DE MATEMÁTICA?
Assinala, com uma cruz, apenas a quadrícula que tu achas que melhor representa a tua relação emocional/sentimental com a Matemática:

MATEMÁTICA

	Gosto	**É-me indiferente**	**Não gosto**
Desde sempre			
A partir de			
A maior parte das vezes			

2. Como explicarias a um amigo teu a relação que assinalaste na questão anterior?

39 Questionário adaptado de Lopes, I. (1997). *Aspectos afectivos da actividade matemática escolar dos alunos* – tese de mestrado (p. 219-221). Lisboa: APM

3. Há com certeza acontecimentos (bons e maus), na tua relação com a Matemática que te marcaram
até agora.
Tenta recordá-los.
Escolhe os mais significativos e preenche o seguinte quadro:

ACONTECIMENTO / SENTIMENTOS

Descrição do acontecimento:	Altura em que o acontecimento se deu:	Sentimento/emoção provocado:	Atitude resultante:

☺, Emoções e aprendizagem da Matemática

4. IMAGINA QUE O TEU PROFESSOR DE MATEMÁTICA TE CONVIDA A DAR UMA AULA AOS TEUS COLEGAS SOBRE UM TEMA DE MATEMÁTICA EM QUE TU ÉS PERITO. AO PREPARARES ESSA AULA O QUE É QUE ACHAS QUE É IMPORTANTE PARA QUE OS TEUS COLEGAS APRENDAM O QUE VAIS ENSINAR?

(Tenta descrever o melhor possível as tuas posições e fundamentá-las)